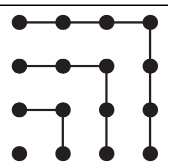
Cangur SCM 2010 (18 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. A la figura següent observem que $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$. Quin és el valor de $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 17$?



A) 14×14 B) 9×9 C) $4 \times 4 \times 4$ D) 16×16 E) 4×9

2. Si les dues files tenen la mateixa suma, quin és el valor de $*$?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$*$

A) 1010 B) 1020 C) 1910 D) 1990 E) 2020

3. Tenim dos recipients cúbics sense tapa. Un té l'àrea de la base igual a 1 dm^2 i l'altre la té de 4 dm^2. Volem omplir d'aigua el cub gros i la portarem d'una font amb el cub petit. Quantes vegades haurem d'anar a la font?

A) 2 vegades B) 4 vegades C) 6 vegades D) 8 vegades E) 16 vegades

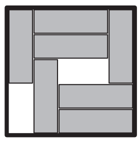
4. Quants nombres de quatre xifres, totes elles imparelles, són divisibles per 5?

A) 900 B) 625 C) 250 D) 125 E) 100

5. El director d'una empresa digué: *"Cadascun dels nostres treballadors té, com a mínim, 25 anys"*. Després, s'adonà que anava errat. Això vol dir que:

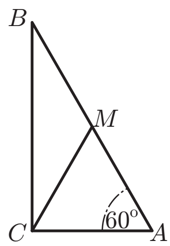
A) Tots els treballadors de l'empresa tenen 25 anys exactament
B) Tots els treballadors de l'empresa tenen més de 26 anys
C) Cap dels seus treballadors no té 25 anys encara
D) Algun treballador de l'empresa té menys de 25 anys
E) Algun treballador de l'empresa té exactament 26 anys.

6. Hi ha set barres de 3 cm × 1 cm dins d'una caixa de 5 cm × 5 cm. És possible fer lliscar les barres dins de la caixa de manera que hi puguem posar una barra més? Si es pot, quantes barres s'han de fer lliscar com a mínim?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) És impossible.

7. El triangle $\triangle ABC$ és rectangle, M és el punt mitjà de la hipotenusa i l'angle $\widehat{A} = 60°$. Quina és la mesura de l'angle $\widehat{BMC}$?



A) 105° B) 108° C) 110° D) 120° E) 125°

8. Quin dels nombres següents pot representar el nombre d'arestes d'un prisma?

A) 100 B) 200 C) 2008 D) 2009 E) 2010

9. Quants nombres $\overline{xy}$ de dues xifres, x i y, compleixen que $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$?

A) 1 B) 2 C) 6 D) 32 E) Cap

10. En una bossa hi ha boles de tres colors: blau, verd i roig, i sabem que n'hi ha com a mínim una de cada color. Sabem que si, amb els ulls tapats, traiem cinc boles de la bossa triades a l'atzar podem assegurar que sempre hi haurà, com a mínim, dues boles roges i que també sempre hi haurà, com a mínim, tres boles del mateix color. Quantes boles blaves hi ha a la bossa?

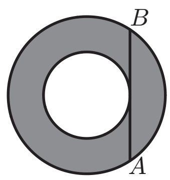
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Falta informació per assegurar-ho.

Qüestions de 4 punts

11. Els tres nombres $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ i $\sqrt[6]{7}$ són termes consecutius d'una progressió geomètrica. Aleshores, el següent terme de la progressió és:

A) $\sqrt[9]{7}$ B) $\sqrt[12]{7}$ C) $\sqrt[5]{7}$ D) $\sqrt[10]{7}$ E) 1

12. La corda AB és tangent al més menut dels cercles concèntrics. Si $AB = 16$, quina és l'àrea de la regió ombrejada?

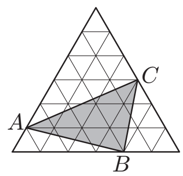


A) 32π B) 63π C) 64π D) $32\pi^2$ E) Depèn dels radis.

13. Els nombres enters x i y compleixen $2x = 5y$. Només un dels nombres següents pot ser el valor de $x + y$. Quin és?

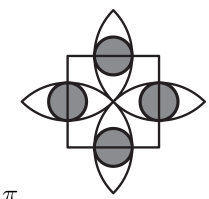
A) 2011 B) 2010 C) 2009 D) 2008 E) 2007

14. El triangle equilàter més gran consta de 36 triangles equilàters més menuts amb una àrea d'1 cm^2 cadascun. Trobeu l'àrea del triangle $\triangle ABC$.



A) 11 cm^2 B) 12 cm^2 C) 15 cm^2 D) 9 cm^2 E) 10 cm^2

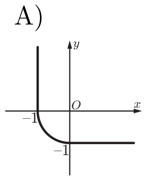
15. En el dibuix el quadrat té costats de longitud 2, els semicercles passen pel centre del quadrat i tenen els centres en el vèrtex del quadrat. El cercles ombrejats tenen els centres en els costats del quadrat i són tangents als semicercles. Quant fa l'àrea ombrejada?



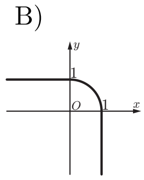
A) $4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\pi$ B) $\sqrt{2}\pi$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\pi$ D) π E) $\dfrac{\pi}{4}$

16. Quin dels següents gràfics correspon al conjunt de les solucions de l'equació $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$?

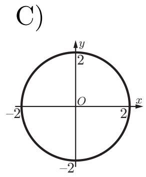
A)



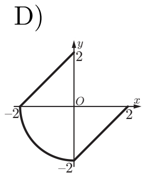
B)



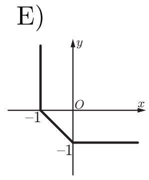
C)



D)



E)



17. Quants triangles rectangles es poden formar amb els seus vèrtexs en els vèrtexs d'un polígon regular de 14 costats?

A) 42 B) 84 C) 88 D) 98 E) 168

18. Se substitueix cada asterisc ($*$) de l'expressió

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$$

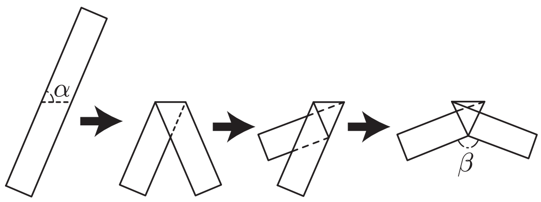
per $+$ (suma) o $\cdot$ (producte). Sigui N el valor més gran que podem obtenir d'aquesta manera. Quin és el factor primer més petit de N?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) Un altre nombre

19. Les longituds dels costats d'un triangle, expressades en centímetres, són els nombres enters i positius 13, x i y, que compleixen $x \cdot y = 105$. Quin és el perímetre del triangle?

A) 35 cm B) 39 cm C) 51 cm D) 69 cm E) 119 cm

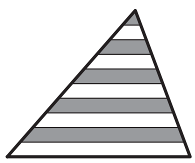
20. Tenim una tira llarga de paper i la dobleguem tres vegades, com es veu a la figura. Busqueu el valor de l'angle β si sabem que l'angle α fa 70°.



A) 140° B) 130° C) 120° D) 110° E) 100°

Qüestions de 5 punts

21. Es dibuixen rectes paral·leles a la base del triangle de la figura que divideixen els altres dos costats en 10 parts iguals. Quin percentatge de l'àrea del triangle és gris?



A) 41,75% B) 42,5% C) 45% D) 46% E) 47,5%

22. 100 corredors acaben una carrera i cap d'ells no arriba al mateix temps que un altre. Quan se'ls demana en quina posició han arribat, tots contesten dient un número entre l'1 i el 100. La suma de totes les respostes és 4000. Quin és el nombre més petit possible de falses respostes?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

23. Es tira un dau tres vegades. Si la tercera vegada surt un nombre igual a la suma dels anteriors, quina és la probabilitat que el 2 hagi sortit almenys una vegada?

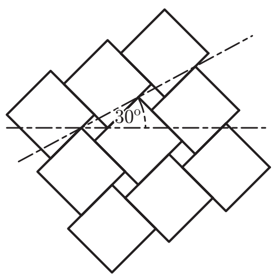
A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{91}{216}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{7}{12}$

24. Calculeu el valor de l'expressió

$$\frac{(2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{1024}+3^{1024}\right)\left(2^{2048}+3^{2048}\right)+2^{4096}}{3^{2048}}$$

A) 2^{2048} B) 2^{4096} C) 3^{2048} D) 3^{4096} E) $3^{2048}+2^{2048}$

25. Una paret està enrajolada amb dos tipus de rajoles quadrades, com es veu a la figura. Les rajoles grans són quadrats amb el costat de longitud a, i les petites, de longitud b. Les línies de punts (horitzontal i inclinada) formen un angle de 30°. Determineu la raó $a : b$.



A) $\left(2\sqrt{3}\right) : 1$ B) $\left(2+\sqrt{3}\right) : 1$ C) $\left(3+\sqrt{2}\right) : 1$ D) $\left(3\sqrt{2}\right) : 1$ E) $2 : 1$

26. En una pissarra hi ha escrits els nombres naturals de l'1 al 10, cada un d'ells 10 vegades. Els estudiants de la classe executen reiteradament el procediment següent: esborren dos dels nombres de la pissarra i, tot seguit, hi escriuen la suma dels nombres que han esborrat disminuïda en una unitat. Ho van fent fins que finalment només queda un nombre escrit a la pissarra. Si n és el nombre que hi queda...

A) $n \leq 440$ B) $n = 451$ C) $n = 460$ D) $n = 488$ E) $n > 500$

27. Un codi de barres com el que es mostra està format per franges alternades en negre i blanc, que sempre comencen i acaben per una franja negra. Cada franja de cada color té una amplada d'1 o 2, i l'amplada total del codi de barres és 12. Quants codis de barres diferents són possibles, sempre començant a llegir d'esquerra a dreta?

A) 124 B) 132 C) 66 D) 128 E) 116

---

28. Si el nombre $\sqrt{0,\underbrace{999\ldots99}_{100\ vegades}}$ s'escriu en forma de decimal infinit, quina es la xifra del 100è decimal?

A) 3 B) 1 C) 0 D) 6 E) Una altra xifra

---

29. Una funció de nombres reals més grans que 0 és tal que

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x.$$

Aleshores $f(6) =$

A) 993 B) 1 C) 2009 D) 1013 E) 923

---

30. Elegim els punts P i Q a cada catet d'un triangle rectangle. Les llargades dels costats són a i b, respectivament. Anomenem K i H les projeccions perpendiculars respectives de P i Q sobre la hipotenusa. Trobeu el valor mínim de la suma $KP + PQ + QH$.

A) $a+b$ B) $\dfrac{2ab}{a+b}$ C) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ D) $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ E) $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}$

Cangur SCM 2010 (25 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

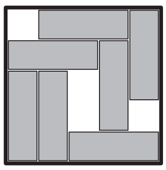
1. En els nombres de tres xifres $\overline{ABC}$ i $\overline{DEF}$ apareixen sis xifres diferents i $\overline{ABC} > \overline{DEF}$. Quin és el valor més menut que pot tenir la diferència $\overline{ABC} - \overline{DEF}$?

A) 1 B) 98 C) 2 D) 99 E) 3

2. Quin dels nombres següents pot representar el nombre d'arestes d'una piràmide?

A) 2000 B) 99 C) 999 D) 2009 E) 1999

3. Hi ha set barres de 3 cm × 1 cm dins d'una caixa de 5 cm × 5 cm. És possible fer lliscar les barres dins de la caixa de manera que hi puguem posar una barra més? Si es pot, quantes barres s'han de fer lliscar com a mínim?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) És impossible.

4. Si les dues files tenen la mateixa suma, quin és el valor de $*$?

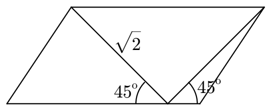
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$*$

A) 1010 B) 1020 C) 1910 D) 1990 E) 2020

5. Una xica nova arriba a la classe i, com a resultat, el percentatge de les xiques repecte al total d'alumnes de la classe canvia del 50% al 52%. Quants xics hi ha en esta classe?

A) 10 B) 15 C) 14 D) 12 E) 13

6. Quina és l'àrea del paral·lelogram de la figura?

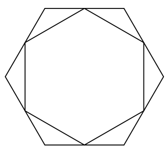


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. El director d'una empresa digué: *"Cadascun dels nostres treballadors té, com a mínim, vint-i-cinc anys"*. Després, s'adonà que anava errat. Això vol dir que:

A) Algun treballador de l'empresa té exactament vint-i-sis anys.
B) Tots els treballadors de l'empresa tenen més de vint-i-sis anys.
C) Cap dels treballadors de l'empresa no té vint-i-cinc anys encara.
D) Tots els treballadors de l'empresa tenen vint-i-cinc anys exactament.
E) Algun treballador de l'empresa té menys de vint-i-cinc anys.

8. L'hexàgon interior té els vèrtexs en els punts mitjans dels costats de l'hexàgon exterior. Quina és (en cm^2) l'àrea de l'hexàgon menut si el gros té l'àrea igual a 20 cm^2?



A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

9. Quants nombres de 4 xifres, és a dir, de l'interval $[1000, 9999]$, són divisibles per 5 i tenen totes les xifres parelles?

A) 625 B) 500 C) 200 D) 125 E) 100

10. Tenim 18 targetes, cadascuna de les quals té exactament un dels nombres 4 o 5. La suma de tots els nombres en les targetes és divisible per 17. Quantes targetes tenen el nombre 4?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) No es pot decidir

Qüestions de 4 punts

11. Els tres nombres $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ i $\sqrt[6]{7}$ són termes consecutius d'una progressió geomètrica. Aleshores, el següent terme de la progressió és:

A) $\sqrt[5]{7}$ B) $\sqrt[9]{7}$ C) $\sqrt[10]{7}$ D) $\sqrt[12]{7}$ E) 1

12. Dues circumferències són tangents i la menuda passa pel centre de la gran. L'àrea del cercle gran fa 2025 cm^2. Quina és la longitud de la circumferència més menuda?

A) 90 cm B) 90π cm C) 45π cm D) $45\sqrt{\pi}$ cm E) 45 cm

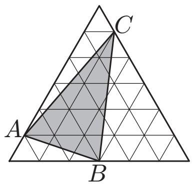
---

13. Si a i b són dos nombres que compleixen $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{2009}{2010}$, quin és el valor de $\dfrac{a}{a+b}$?

A) No es pot decidir. B) $\dfrac{6009}{6010}$ C) $\dfrac{4009}{4010}$ D) $\dfrac{4019}{4020}$ E) $\dfrac{2019}{2020}$

---

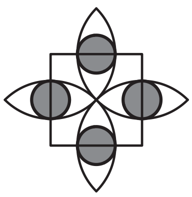
14. El triangle equilàter més gran consta de 36 triangles equilàters menuts amb una àrea d'1 cm^2 cadascun. Trobeu l'àrea del triangle $\triangle ABC$.



A) 13 cm^2 B) 12 cm^2 C) 15 cm^2 D) 11 cm^2 E) 14 cm^2

---

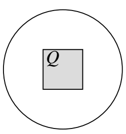
15. En el dibuix el quadrat té costats de longitud 2, els semicercles passen pel centre del quadrat i tenen els centres en els vèrtexs del quadrat. El cercles ombrejats tenen els centres en els costats del quadrat i són tangents als semicercles. Quant fa l'àrea ombrejada?

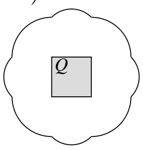


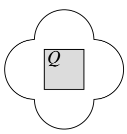
A) $\dfrac{\pi}{4}$ B) $4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi$ D) π E) $\sqrt{2}\pi$

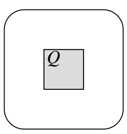
---

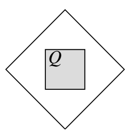
16. Quina de les corbes que es donen a les opcions de resposta constitueix el lloc geomètric dels punts del pla que veuen el quadrat Q amb un angle de 45°?

A)


B)


C)


D)


E)


17. Si A i B són nombres enters i hi ha una translació que transforma el punt $(5, -A)$ en el $(A, 2)$ i el punt $(A, -2000)$ en el punt $(B, -A)$, quin és el valor de B?

A) -2010 B) -1993 C) 2010 D) 2000 E) 1993

18. La mitjana d'un conjunt de 2000 nombres és 2000. Afegim al conjunt 2010 nombres nous i resulta que la mitjana del nou conjunt de 4010 nombres ara és 2010. Quina és la mitjana del conjunt dels 2010 nombres que hem afegit?

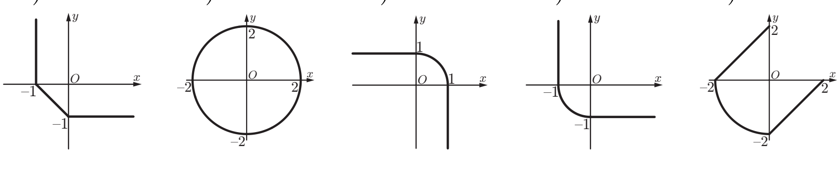
A) Menys de 2010
B) 2010
C) Més de 2010 però menys de 2020
D) 2020
E) Més de 2020

19. Les longituds dels costats d'un triangle, expressades en centímetres, són els nombres enters i positius 14, x i y, que compleixen $x \cdot y = 156$. Quin és el perímetre del triangle?

A) 39 cm B) 42 cm C) 62 cm D) 104 cm E) 171 cm

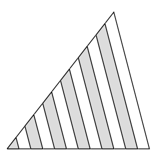
20. Quin dels següents gràfics correspon al conjunt de les solucions de l'equació $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$?

A) B) C) D) E)



Qüestions de 5 punts

21. Es dibuixen rectes paral·leles a un dels costats del triangle de la figura que divideixen els altres dos costats en 12 parts iguals. Si l'àrea del triangle és de 24 unitats d'àrea, quina és l'àrea total que s'ha acolorit de gris?



A) 5,5 B) 11 C) 12 D) 13 E) 6,5

22. 120 corredors acabaren una carrera i cap d'ells no arriba al mateix temps que un altre. Quan se'ls demana en quina posició han arribat, tots contesten dient un número entre l'1 i el 120. La suma de totes les respostes és 5400. Quin és el nombre més petit possible de falses respostes?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 16 E) 17

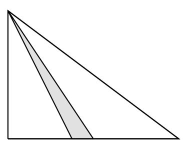
23. Es tira un dau tres vegades. Si la tercera vegada surt un nombre igual a la suma dels anteriors, quina és la probabilitat que el 2 hagi sortit almenys una vegada?

A) $\frac{91}{216}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{1}{2}$

24. La suma de les llargàries de les dotze arestes d'una caixa ortoèdrica tancada és 140 cm i la distància d'un dels vèrtexs al vèrtex més llunyà és de 21 cm. Quina és l'àrea de l'exterior de la caixa en cm^2 ?

A) 776 B) 784 C) 798 D) 800 E) 812

25. Les llargàries dels catets d'un triangle rectangle són 30 cm i 40 cm, respectivament. Hem dibuixat la mitjana i la bisectriu que passen pel vèrtex oposat al catet de 40 cm. Quina és, en cm^2, l'àrea del triangle format d'aquesta manera?



A) 50 B) 70 C) 75 D) 80 E) 150

26. En una pissarra hi ha escrits els nombres naturals de l'1 al 8, cada un d'ells 8 vegades. Els estudiants de la classe executen reiteradament el procediment següent: esborren dos dels nombres de la pissarra i tot seguit hi escriuen la suma dels nombres que han esborrat disminuïda en una unitat. Ho van fent fins que finalment només queda un nombre escrit a la pissarra. Quin és el nombre que hi queda?

A) Un nombre més petit que 200
B) 225
C) 232
D) 288
E) Un nombre més gran que 300

27. Un alfabet consta de 6 lletres, que s'han codificat així:

• , ▬ , •• , ▬▬ , •▬ , ▬•

En un cert moment el transmissor falla i no posa espais entre les lletres. La Cangureta ha rebut una paraula que consta, en total, de 8 símbols (que, naturalment, cada un d'ells és un punt, •, o bé una ratlla, ▬). Una vegada processats els símbols, de quantes maneres la pot interpretar?

A) 256 B) 16 C) 21 D) 34 E) 55

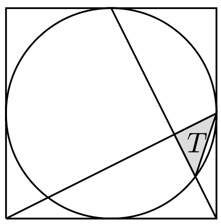
28. Una funció de nombres reals més grans que 0 és tal que

$$3f(x) + 4f\left(\frac{2010}{x}\right) = 7x.$$

Quin és el valor de $f(30)$?

A) 335 B) 1 C) 2009 D) 190 E) 178

29. En la figura podeu veure un quadrat i el cercle que li és inscrit. Tracem dos segments que uneixen dos vèrtexs consecutius del quadrat amb els punts mitjans dels costats oposats. Considerem el triangle T acolorit, que té per vèrtexs el punt mitjà d'un costat i els punts d'intersecció del segment anterior que no passa per aquest vèrtex amb l'altre segment i amb el cercle. Si l'àrea de T fa 10 cm^2, quina és la mesura en centímeres del costat del quadrat?



A) 20 B) $8\sqrt{5}$ C) $10\sqrt{\pi}$ D) $10 + 4\sqrt{3}$ E) 18

30. Dos amics s'han matriculat en un institut que té dues línies de 1r d'ESO; al grup A s'assignen a estudiants i al grup B, b estudiants, i es compleix $a \leq b$, $20 \leq a \leq 30$ i $20 \leq b \leq 30$. Quan s'han matriculat els han dit: *"Teniu una probabilitat exactament igual a 1/2 de quedar al mateix grup"*. Quants alumnes hi haurà en el grup B?

A) 21 B) 28 C) 30 D) 20 E) Els mateixos que a l'A.

Cangur SCM 2010 Nivell 4

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi
Xavier Fernández-Real Girona (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 130.0 punts

Segon premi, ex-aequo
Bru Martinell Chicano (Institut Jaume Vicens Vives, Girona),
i Ramon Zuloaga Geli (Institut Cap Norfeu, Roses) 125.0 punts

Altres premis
Salvi Solà Martinell (Institut Secretari Coloma, Barcelona), 122.5 punts
Guillem Alsina Oriol (Institut Jaume Callís, Vic)
i Adrià González Esteve (Institució Cultural del CIC, Barcelona) 120.0 punts
Gerard Neras Lozano (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 111.0 punts
Laura Cifuentes Fontanals (Llor, Sant Boi de Llobregat), 108.25 punts
Pere Planell Morell (Aula Escuela Europea, Barcelona), 103.0 punts
David Guillen Huerga (Institut Ribera Baixa, El Prat de Llobregat)
i Ignasi Ferreté Fernández (Institut Secretari Coloma, Barcelona), 96.25 punts
Domènec Ruiz Balet (Institut Lluís de Peguera, Manresa), 93.75 punts
Pol Naranjo Barnet (Institut Damià Campeny, Mataró), 93.25 punts
Nicolau Roig Tió (Bell-lloc del Pla, Girona), 92.0 punts
Carlos García Huerta (Sant Joan Bosco, Barcelona), 90.75 punts

---

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions
Laura Raguer Pardo (Institut Manuel Blancafort, La Garriga)
i Pablo Pastor Riquelme (Institut Marius Torres, Lleida), 89.5 punts
Elisabet Baena Sanfeliu (Sant Joan Bosco, Barcelona), 89.25 punts
Òscar Ferrer Jogera (Institut Joan Guinjoan i Gispert, Riudoms), 85.5 punts
Pere Romero Pastor (Institut Pere Calders, Cerdanyola del Vallès)
i David Vallverdú Cabrera (Institut Montserrat, Barcelona), 85.0 punts
Elisa Castañer Enseñat (Sant Pau, Barcelona), 84.0 punts
Jordi Antoja Lleonart (Institut Eugeni Xammar, L'Ametlla del Vallès)
i Jorge Valiente Jorge (Institut Can Planas, Barberà del Vallès), 83.75 punts

Premis. Balears

Primer premi
Javier Tejero Gomis (IES Mossèn Alcover, Manacor), 101.25 punts

Segon premi
José Carlos Font Trinchant (IES Joan Alcover, Palma), 91.25 punts

Tercer premi
Katya Danailova Dimitrova (IES Francesc de Borja Moll, Palma), 86.50 punts

Altres premis
Francesc Adrover Monserrat (IES Felanitx, Felanitx), 83.75 punts
Ellis Coll Terrett (IES Biel Martí, Ferreries),
i Carlos Reche Lendínez (IES Joan Alcover, Palma), 80.75 punts
Jaime Feliu de Cabrera Salas (Col·legi Sant Francesc, Palma), 79.25 punts
Julià Duran Ballester (IES Joan Alcover, Palma),
Yunzhu Jin (IES Joan Alcover, Palma),
i Rafel Perelló Roig (IES Mossèn Alcover, Manacor) 72.25 punts

Premis. Comunitat Valenciana

Primer premi
David Magraner Villalba (IES d'Almussafes), 115.75 punts

Segon premi
Juan Vicente Folch Celades (IES La Vall d'Alba, Vall d'Alba), 106.25 punts

Tercer premi
Alejandro Medina Fraile (IES de La Pobla de Vallbona), 103.75 punts

Altres premis
Maria Asins Aleixandre (IES d'Almussafes), 92.75 punts
Aitana Gisbert Nieto (Colegio Alemán de Valencia, Valencia), 90.0 punts
Eric Cuartero Zaragozá (IES Ramon Cid, Benicarló), 87.5 punts
Sergio Martín Álvarez (Madre Vedruna Sagrado Corazon, Castelló), 86.0 punts
Llorenç Espinosa Portalés (IES Juan Bautista Porcar, Castelló), 85.0 punts
Raúl Moragues Moncho (IES Jorge Juan, Alacant), 83.0 punts
Álvaro Ciurana Tatay (IES El Saler, Valencia-El Saler),
i Salvador Vila Pastor (IES d'Albal), 80.75 punts

Cangur SCM 2010 (18 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts. Solucions

1. B. 9×9.

Podem veure a la figura que la suma dels quatre primers nombres imparells és 4×4. Si afegim el següent imparell, 9 punts, tenim la suma dels 5 primers imparells, 5×5, i així successivament ens adonem que la suma dels n primers nombres imparells és n^2. Com que $1 + 3 + 5 + ... + 17$ és la suma dels 9 primers nombres imparells, la resposta és $9^2 = 9 \times 9$.

2. C. 1910.

La diferència entre la casella de baix i la de dalt de cada una de les 10 parelles de caselles conegudes és 10, en total $10 \cdot 10 = 100$ que hem de restar a 2010 per obtenir 1910 com a valor de l'última casella per tal que les dues files sumin igual.

3. D. 8 vegades.

El cub menut té d'aresta 1 dm. El cub gran té d'aresta 2 dm. Per tant els respectius volumns són de 1 dm^3 i 8 dm^3. Caldrà anar a la font 8 vegades.

4. D. 125.

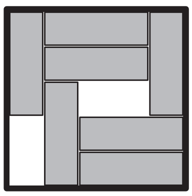
La darrera xifra ha de ser 5, perquè el nombre ha de ser múltiple de 5 i acabar en xifra imparella. A és la primera, la segona i la tercera xifres pertanyen al conjunt $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ i, per tant, es poden formar un total de $1 \times 5 \times 5 \times 5 = 125$ nombres de quatre xifres que compleixin l'enunciat.

5. D. Algun treballador de l'empresa té menys de 25 anys..

Si va errat vol dir que la proposició és falsa. Per tant, com que el contrari de *Cadascun*, (és a dir *Tots*) és *Algun* i la negació de $edat < 25$ és $edat \geq 25$ resulta que hi ha algun treballador amb menys de 25 anys

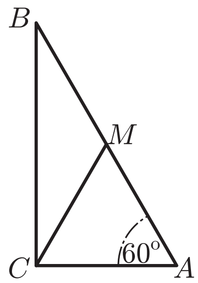
6. B. 3.

Inicialment només es pot fer lliscar la barra vertical de l'esquerra que deixarà lloc per desplaçar posteriorment les dues barres horitzontals superiors. Si només desplacem una d'aquestes barres no fem lloc per una nova peça, però si les desplacem totes dues sí que aconseguirem espai lliure per posar-hi una barra més.



7. D. $120°$.

En un triangle rectangle, la mitjana que surt de l'angle recte té la mateixa longitud que la meitat de la hipotenusa. Per veure-ho basta fer la paral·lela mitjana que passa per M, que divideix el triangle MCA en dos triangles rectangles iguals i, per tant, MCA és isòsceles amb angles iguals en A i C. Per tant, en aquest cas, que l'angle $\widehat{A} = 60°$, el triangle MCA és un triangle equilàter i l'angle demanat, suplementari d'un de $60°$ és de $120°$.



8. E. 2010.

Si les bases són polígons amb n costats, cada una té n arestes. Cadascun dels n vèrtexs d'una base aporta una nova aresta: per tant, tindrà en total $3n$ arestes. La solució ha de ser, per tant, un nombre múltiple de 3: 2010.

9. A. 1.

S'hi s'ha de complir que $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$ ha de ser, forçosament, $x - 3 = 0$ i $y - 2 = 0$. Per tant $x = 3, y = 2$ i l'únic nombre que compleix l'enunciat és el 32.

10. A. 1.

A la bossa solament hi pot haver una bola blava (i una bola verda, però açó no es pregunta). Si hi haguera dues o més boles blaves seria possible que una elecció de cinc fos $RRBBV$, que no compliria la condició d'un mínim de tres boles d'un color.

Qüestions de 4 punts

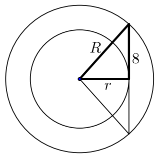
11. E. 1.

La raó de la progressió geomètrica és $r = \dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt[6]{7^2}}{\sqrt[6]{7^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}$.

El terme següent serà $a_4 = a_3 \cdot r = \sqrt[6]{7} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[6]{7}} = 1$.

12. C. 64π.

Si R i r són els radis respectius dels dos cercles, la figura mostra que $8^2 = R^2 - r^2$. Ara bé, l'àrea demanada és la d'una corona circular, a saber, $A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 64\pi$.

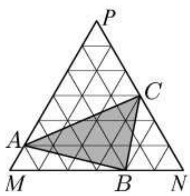


13. C. 2009.

Si posem $N = x + y$ i calculem $2N = 2x + 2y = 5y + 2y = 7y$. Però si $2N = 7y$ és que N ha de ser un múltiple de 7; l'única de les opcions de resposta que és un múltiple de 7 és $N = 2009$.

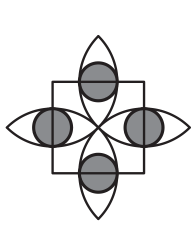
14. A. 11 cm^2.

L'àrea del triangle gris la podem obtenir restant a 36 les àrees dels tres triangles que envolten el gris. Si posem b i h la base i l'altura dels triangles petits, veurem que aquests tres triangles tenen àrees de 4 (el que té base $MB = 4b$, altura h), 6 (el que té base $BN = 2b$, altura $3h$) i 15 (base $PA = 5b$, altura $3h$). Total, $36 - 4 - 6 - 15 = 11$.



15. A. $4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\pi$.

El radi de cadascun dels semicercles que apareixen en la figura és $\sqrt{2}$, justament la meitat de la diagonal del quadrat. El radi de cadascun dels cercles ombrejats es pot trobar com el radi dels semicercles menys la meitat del costat del quadrat, és a dir $r = \sqrt{2} - 1$. L'àrea ombrejada, que és la de quatre d'aquests cercles serà $A = 4\pi r^2 = 4\pi(\sqrt{2} - 1)^2$; si operem veurem que $A = 4\pi(3 - 2\sqrt{2})$.



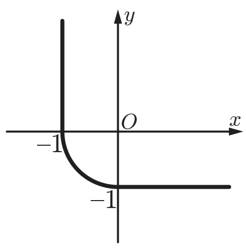
16. A.

Analitzem què succeeix segons el signe de la x.

• Si $x \geq 0$ tenim que $|x| = x$ i ha de ser $(y - |y|)^2 = 4$. Com que sempre $|y| \geq y$ ha de ser $|y| - y = 2$ d'on resulta $y = -1$

• Semblantment veuríem que si $y \geq 0$ ha de ser $x = -1$.

• Queda el cas $x < 0, y < 0$. Com que en aquest cas $x - |x| = 2x$ i $y - |y| = 2y$ l'equació es transforma en $4x^2 + 4y^2 = 4$ o $x^2 + y^2 = 1$ que, restringint-nos a $x < 0, y < 0$ és un quadrant de la circumferència de centre (0,0) i radi 1.



17. B. 84.

Triat un dels vèrtexs del polígon de 14 costats com a vèrtex de l'angle recte, hi ha 6 triangles rectangles que corresponen a l'enunciat. No pot ser vèrtex d'aitals triangles el punt diametralment al que hem triat. Els altres 12 es poden triar per parelles de punts diametralment oposats per formar triangle rectangle amb l'angle recte en el punt trait.

Com que això passa per cada vèrtex del polígon inicial, el nombre total de triangles rectangles que podem fer és $14 \times 6 = 84$.

18. E. Un altre nombre.

El valor més gran que podem obtenir és

$$N = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9.$$

Com que N és un múltiple de 2 més 1 no és múltiple de 2; semblantment amb el 3 i amb el 5 i amb el 7. De fet el divisor primer més petit de N és 19.

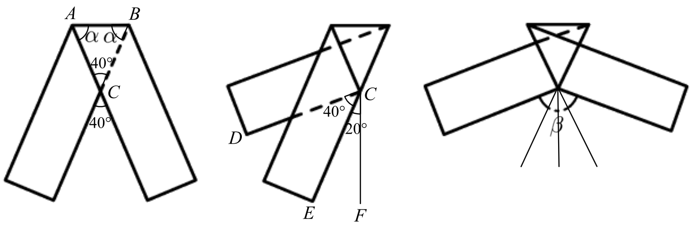
19. A. 35 cm.

Donat que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ tindrà $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ divisors, o siga, disposem de 4 parelles de divisors $x < y$ que compleixen $xy = 105$, que són $\{1, 105\}, \{3, 35\}, \{5, 21\}, \{7, 15\}$. Però perquè $x,\ y$ puguin formar triangle amb 13 cal que $13 < x + y,\ x < 13 + y,\ y < 13 + x$ i l'única de les parelles compatible amb aquestes codicions és $\{7, 15\}$.

Per tant el perímetre serà $7 + 15 + 13 = 35$ cm.

20. C. 120°.

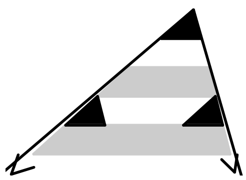
Després del primer doblec de la tira de paper s'observa un triangle ABC que és isòsceles perquè té els dos angles en els vèrtexs A i B iguals a α és a dir 70° , i d'aquí els dos angles oposats pel vèrtex en C mesuren 40°. Després del segon doblec tenim l'angle DCE de 40° i l'angle ECF de $\frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$. D'aquí podem veure que amb l'últim doblec obtenim l'angle β que serà el doble de l'angle $DCF = 60^\circ$ o el triple del $DCE = 40^\circ$, o sigui $\beta = 120^\circ$.



Qüestions de 5 punts

21. C. 45%.

La base del petit triangle fosc de la punta de dalt és 1/10 de la base del gran i l'altura n'és 1/10 de l'altura del gran, per tant el triangle fosc té una àrea igual a 1/100 de l'àrea total. Podem observar, tal com es mostra a la figura en un cas, que cada franja té una àrea que és igual a la de la franja de sota menys dos dels petits triangles.



Per tant, si comparem l'àrea de cada franja grisa amb la blanca que té a sota tindrem que la diferència de les àrees de les blanques i la de les grises serà de 10 dels petits triangles o sigui 10/100 de l'àrea total. D'aquí podem concloure que l'àrea de les grises ha de ser 45/100 i la de les blanques 55/100 del total, és a dir la part grisa és el 45% del total.

Podeu veure una altra manera d'arribar al resultat a la pàg ... (problema 22, nivell 3).)

22. D. 12.

Si tots hagueren dit la veritat, la suma de posicions seria:

$$1+2+...+100=\frac{1+100}{2}\cdot 100=5050.$$

Com que la suma de les respostes es 4000, hi ha un defecte de 1050 com a conseqüència de les mentides. Suposem que menteixen n persones. El nombre mes petit de falses respostes es produirà quan les n mentides siguen el mes exagerades“ possible. És a dir: des del classificat en el lloc 100è fins al classificat en el lloc $100-n$ diuen que han quedat el 1r. Es produirà aleshores un defecte de:

$$99+98+...+100-n=\frac{(99+100-n)n}{2}\geq 1050.$$

L'interval solució d'aquesta inequació pel que fa a nombres enters és $12\leq n\leq 188$ i per tant la solució del problema és $n=12$.

---

23. D. $\frac{8}{15}$.

Com que es tracta d'una probabilitat condicionada l'univers de l'experiència quedarà restringit als resultats de les tirades dels tres daus que compleixin l'enunciat. Podem veure que són, indicant (primer dau, segon dau, tercer dau), els quinze casos següents:

(1,1,**2**), (1,**2**,3), (1,3,4), (1,4,5), (1,5,6), (**2**,1,3), (**2**,**2**,4), (**2**,3,5)
(**2**,4,6), (3,1,4), (3,**2**,5), (3,3,6), (4,1,5), (4,**2**,6), (5,1,6)

Com que dels 15 casos n'hi ha 8 on apareix el **2**, la probabilitat demanada, que haja eixit el 2 si el tercer dau és suma dels altres dos és $\frac{8}{15}$.

---

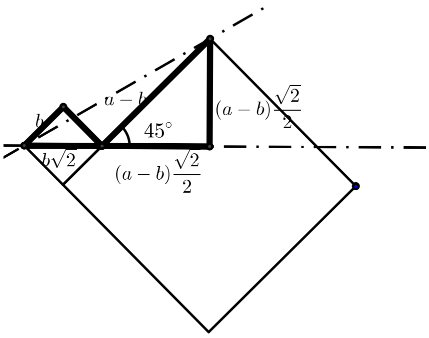
24. C. 3^{2048}.

Multipliquem el numerador
$(2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{1024}+3^{1024}\right)\left(2^{2048}+3^{2048}\right)+2^{4096}$
per $(3-2)$ i obtenim, successivament:
$\left(3^2-2^2\right)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{1024}+3^{1024}\right)\left(2^{2048}+3^{2048}\right)+2^{4096}$
$\left(3^4-2^4\right)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{1024}+3^{1024}\right)\left(2^{2048}+3^{2048}\right)+2^{4096}$, ...
$\left(3^{4096}-2^{4096}\right)+2^{4096}=3^{4096}$, i, finalment $\frac{3^{4096}}{3^{2048}}=3^{2048}$.

---

25. B. $\left(2+\sqrt{3}\right):1$.

A partir de les definicions bàsiques de trigonometria aplicades en els dos triangles rectangles remarcats a la figura podem veure que un triangle rectangle del qual un dels angles és el de 30° que es dóna a l'enunciat té com a catets $(a-b)\frac{\sqrt{2}}{2})$ i $(a+b)\frac{\sqrt{2}}{2})$. Per tant $\tan(30°)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{a-b}{a+b}$. Si operem trobarem $(\sqrt{3}-1)a=(\sqrt{3}+1)b$ i, doncs, $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$.



26. B. 451.

Inicialment la suma era $(1+2+...+10)\cdot 10=550$.
Cada volta que esborrem dos nombres, la suma del conjunt disminueix en una unitat. Com que aquest procés es repeteix $10^2-1=99$ voltes fins que només queda un únic nombre, aquest serà 550 - 99 = 451

27. E. 116.

Les franges negres i blanques de cada possible codi les podem considerar com a una llista ordenada d'uns i dosos que representen l'amplada de cada franja. Sabem que:

a) La suma daquesta llista ha de ser 12

b) el nombre total de franges, o sigui el nombre d'elements de la llista d'uns i dosos, ha de ser un nombre imparell per garantir que el codi comenci i acabi en franja negra.

Analitzem les possibilitats:

i) El nombre màxim de franges en un codi pot ser 11, deu uns i un dos. Hi ha tants codis amb 11 franges com maneres diferents de posar la franja damplada 2 en els 11 llocs possibles. Per generalitzar-ho ho podem indicar com $\binom{11}{1}$.

ii) De manera anàloga podem comptar els codis amb 9 franges (6 uns i 3 dosos). Hem d'escollir dels 9 llocs quins són els 3 llocs on posem el dos i això ho podem fer de $\binom{9}{3}$ maneres.

iii) Finalment, amb 7 franges (2 uns i 5 dosos). Aquest és el nombre mínim de franges que pot tenir un codi com els que indica l'enunciat. El nombre de codis de 7 franges que hi ha és $\binom{7}{5}$.

És a dir que en total tindrem $\binom{11}{1} + \binom{9}{3} + \binom{7}{5} = 11 + 84 + 21 = 116$ codis possibles.

28. E. Una altra xifra.

Com que l'arrel quadrada d'un nombre positiu més petit que 1 és més gran que el nombre, si posem $A = \sqrt{0,\underbrace{999\ldots99}_{100\ vegades}}$ serà $0,\underbrace{999\ldots99}_{100\ vegades} < A < 1$ i, per tant, la 100a xifra decimal d'aquest nombre és un 9.

29. A. 993.

6 és un divisor de 2010, ja que $2010 = 6 \cdot 335$. Aleshores,

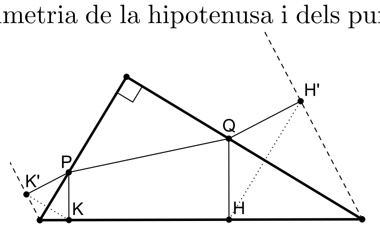
- Fent $x = 6$ tenim $2f(6) + 3f(335) = 30$
- Fent $x = 335$ tenim $2f(335) + 3f(6) = 1675$

Si resolem el sistema format amb les dues equacions anteriors obtenim: $f(6) = 993$.

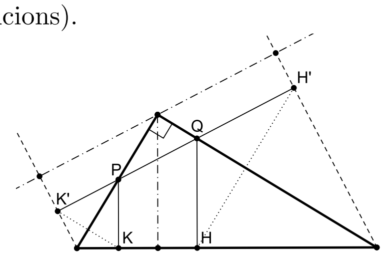
30. C. $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Per raons de simetria es pot pensar que la distància mínima s'obtindrà quan els dos punts sobre els catets coincideixin i siguin el vèrtex de l'angle recte. La distància demanada serà, aleshores, el doble de l'altura sobre la hipotenusa. I així és, cosa que tot seguit demostrem.

Fem una simetria de la hipotenusa i dels punts H, K respecte els dos catets.



Com que la distància $K'P+PQ+QH'$ és igual que la que ens demanen, la distància mínima s'obtindrà quan PQ sigui perpendicular a les dues rectes simètriques que hem fet (en particular això passarà en el límit si P i Q coincideixen amb el vèrtex de l'angle recte però és bo observar que hi ha altres solucions).



Si indiquem com B l'angle oposat al catet b, l'altura sobre la hipotenusa es pot calcular com $h = a \cdot \sin(B)$, és a dir, $h = a \cdot \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i la distància mínima demanada serà el doble de h.

Cangur SCM 2010 (25 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. E. 3.

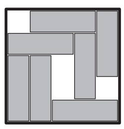
Les xifres de les desenes shan de dur 1 unitat com a mínim; si busquem la diferència més menuda haurà de ser justament 1 unitat. Eixa diferència més menuda correspondrà al mínim valor que pot prendre $\overline{BC}$, que serà 01, i al màxim que pot prendre $\overline{EF}$ que serà 98. Com que han d'aparèixer 6 xifres diferents pot ser, per exemple, 301 - 298 = 3, o bé 401 - 398 = 3, etc.

2. A. 2000.

Si la base és un polígon amb n costats té n arestes. Cadascun dels n vèrtexs de la base aporta una aresta: per tant, tindrà $2n$ arestes. La solució ha de ser, per tant, un nombre parell: 2000.

3. A. 2.

Si movem una sola peça (sigui quina sigui de les dues úniques que podem moure, a saber, les dues que estan a dalt, una horitzontal i l'altra vertical) es comprova que encara no hi cap una altra peça.



Ara bé, si movem cap a l'esquerra la peça horitzontal de dalt i després cap amunt l'única peça que podrà fer-ho, aleshores veiem que a sobre de la peça que hi ha a sota hi cap una altra peça posada horitzontalment.

4. C. 1910.

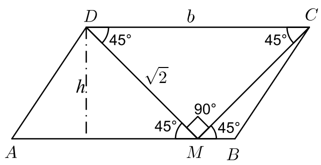
La diferència entre la casella de baix i la de dalt de cada una de les 10 parelles de caselles conegudes és 10, en total $10 \cdot 10 = 100$ que hem de restar a 2010 per obtenir 1910 com a valor de l'última casella per tal que les dues files sumin igual.

5. D. 12.

Inicialment hi havia un 50% de xiques, per tant, n xics i n xiques dun total de $2n$ alumnes. En incorporar-se una altra xica tindrem $n+1$ xiques i $2n+1$ alumnes, per tant $\frac{n+1}{2n+1} = \frac{52}{100}$, d'on resulta $n = 12$.

6. A. 2.

A partir de l'enunciat podem deduir els angles que es veuen a la figura; en particular $\angle MDC = \angle DMA$ per alterns interns. Aleshores l'altura del paral·lelogram és $h = \sqrt{2}\sin(45°) = 1$ i, com que el triangle DMC és rectangle isòsceles, la base b compleix $b^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$ és a dir $b = 2$ i per tant l'àrea és de 2 unitats quadrades.

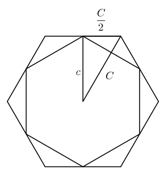


7. E. Algun treballador de l'empresa té menys de 25 anys..

Si va errat vol dir que la proposició és falsa. Per tant, com que el contrari de *Cadascun*, (és a dir *Tots*) és *Algun* i la negació de $edat < 25$ és $edat \geq 25$ resulta que hi ha algun treballador amb menys de 25 anys

8. C. 15.

És clar que els dos hexàgons regulars són figures semblants. Per veure quina és la raó de semblança podem dibuixar el triangle rectangle de la figura, on la hipotenusa és el costat de l'hexàgon gran, un catet és el costat de l'hexàgon menut i l'altre catet és la meitat del costat de l'hexàgon gran. Pel teorema de Pitàgores, tindrem $C^2 = c^2 + \left(\dfrac{C}{2}\right)^2$.



D'aquí en resulta que la raó de semblança és $r = \dfrac{C}{c} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. La raó de les àrees serà $r^2 = \dfrac{4}{3}$. Si A és l'àrea demanada, serà $\dfrac{20}{A} = \dfrac{4}{3}$ i resulta $A = 15$.

9. E. 100.

La darrera xifra ha de ser 0, perquè el nombre ha de ser múltiple de 5 i totes les xifres han de ser parelles. A més la primera xifra pertany a $\{2, 4, 6, 8\}$, la segona xifra ha de ser de $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ i la tercera xifra de $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ i, per tant, hi haurà un total de $4 \times 5 \times 5 \times 1 = 100$ nombres.

10. B. 5.

Si n targetes tenen inscrit el número 4, les $18 - n$ targetes restants tindran inscrit el número 5. La suma de tots els nombres vindrà donada per $4n + 5(18 - n) = 90 - n = 85 + (5 - n)$. Donat que 85 és un múltiple de 17, $5 - n$ també ho haurà de ser. És necessari, doncs, que $n = 5$.

Qüestions de 4 punts

11. E. 1.

La raó de la progressió geomètrica és $r = \dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt[6]{7^2}}{\sqrt[6]{7^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}$.

El terme següent serà $a_4 = a_3 \cdot r = \sqrt[6]{7} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[6]{7}} = 1$.

12. D. $45\sqrt{\pi}$ cm.

El radi de la circumferència gran és el doble del de la menuda, $R = 2r$. L'àrea de la gran és $A = \pi R^2 = 2025$ d'on $R = \sqrt{\dfrac{2025}{\pi}} = \dfrac{45}{\sqrt{\pi}}$. La longitud de la menuda és $L = 2\pi r = 2\pi \dfrac{R}{2} = 45\sqrt{\pi}$

13. D. $\dfrac{4019}{4020}$.

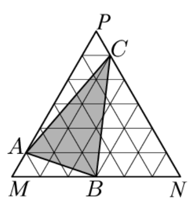
Perquè les fraccions siguen equivalents, els numeradors i els denominadors dambdues fraccions han de ser proporcionals. És a dir,

$$\begin{cases} a - b = 2009k \\ a + b = 2010k \end{cases}$$

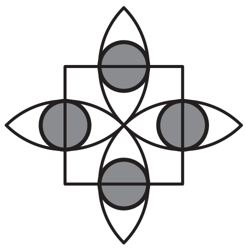
d'on resulta $a = 4019k/2$. Aleshores $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{4019k/2}{2010k} = \dfrac{4019}{4020}$.

14. A. 13 cm^2.

L'àrea del triangle gris la podem obtenir restant a 36 les àrees dels tres triangles que l'envolten. Si posem b i h la base i l'altura dels triangles petits, veurem que aquests tres triangles tenen àrees de 3 (el que té base $MB = 3b$, altura h), 15 (el que té base $BN = 3b$, altura $5h$) i 5 (base $PA = 5b$, altura h). Total, $36 - 3 - 15 - 5 = 13$.



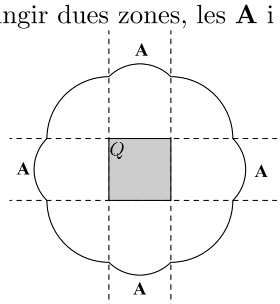
15. B. $4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$.

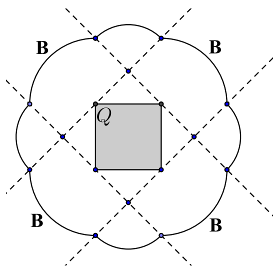


El radi de cadascun dels semicercles que apareixen en la figura és $\sqrt{2}$, justament la meitat de la diagonal del quadrat. El radi de cadascun dels cercles ombrejats es pot trobar com el radi dels semicercles menys la meitat del costat del quadrat, és a dir $r=\sqrt{2}-1$. L'àrea ombrejada, que és la de quatre d'aquests cercles serà $A=4\pi r^2=4\pi(\sqrt{2}-1)^2$; si operem veurem que $A=4\pi(3-2\sqrt{2})$.

16. B..

Cal distingir dues zones, les **A** i les **B** que s'indiquen a les figures següents:





Des dels punts de les zones **A**, veiem els costats del quadrat. El lloc geomètric correspondrà a larc capaç de 45° que és un arc de circumferència. Des dels punts de les zones B, veiem les diagonals del quadrat. El lloc geomètric també correspon a larc capaç de 45°, que ara té un radi més gran que abans perquè la longitud de la diagonal és més gran que la del costat.

17. E. 1993.

Anomenem (x,y) el vector de la translació. Aleshores $(5,-A)+(x,y)=(A,2)$ i que $(A,-2000)+(x,y)=(B,-A)$. Aleshores $A-5=B-A$ i $2-(-A)=-A-(-2000)$. De la primera equació obtenim que $2A-5=B$ i de la segona que $2A=2000-2=1998$. Aleshores $B=2A-5=1998-5=1993$.

18. C. Més de 2010 però menys de 2020.

Si afegíssim al conjunt 2000 nombres nous i la nova mitjana fos 2010 resultaria que la mitjana del conjunt de nombres afegit seria exactament 2020; com que hem afegit més de 2000 nombres, la mitjana del conjunt de nombres afegit serà més menuda que 2020. Per altra banda, com que la nova mitjana és 2010 i l'anterior era més menuda, forçosament la mitjana dels nombres que afegim ha de ser més gran que 2010.

Podem veure-ho també mitjançant càlculs. Si anomenem S_1 la suma dels 2000 primers nombres es compleix $\dfrac{S_1}{2000} = 2000$ és a dir $S_1 = 2000 \cdot 2000$.

Si S_2 és la suma dels 2010 nombres afegits aleshores $\dfrac{S_1 + S_2}{4010} = 2010$ d'on resulta $S_2 = 4010 \cdot 2010 - 2000 \cdot 2000$.

El problema ens demana $m = \dfrac{S_2}{2010} = 4010 - \dfrac{2000 \cdot 2000}{2010}$.

Podem escriure 4010 com $2010 + 2000$ i tindrem

$$m = \frac{2010 \cdot 2010 + 2000 \cdot 2010 - 2000 \cdot 2000}{2010}$$

i això és $m = 2010 + 10 \cdot \dfrac{2000}{2010}$. És clar que $m > 2010$ i, com que $10 \cdot \dfrac{2000}{2010} < 10$ també concloem que $m < 2020$.

19. A. 39.

Donat que $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ tindrà $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ divisors, o siga, disposem de 6 parelles de divisors $x < y$ que compleixen $xy = 156$, que són $\{1, 156\}, \{2, 78\}, \{3, 52\}, \{4, 39\}, \{6, 26\}, \{12, 13\}$. Però perquè $x,\ y$ puguin formar triangle amb 14 cal que $14 < x + y,\ x < 14 + y,\ y < 14 + x$ i l'única de les parelles compatible amb aquestes codicions és $\{12, 13\}$. Per tant el perímetre serà $12 + 13 + 14 = 39$ cm.

20. D.

Analitzem què succeeix segons el signe de la x.

• Si $x \geq 0$ tenim que $|x| = x$ i ha de ser $(y - |y|)^2 = 4$. Com que sempre $|y| \geq y$ ha de ser $|y| - y = 2$ d'on resulta $y = -1$

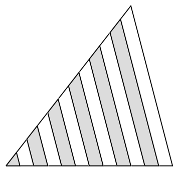
• Semblantment veuríem que si $y \geq 0$ ha de ser $x = -1$.

• Queda el cas $x < 0, y < 0$. Com que en aquest cas $x - |x| = 2x$ i $y - |y| = 2y$ l'equació es transforma en $4x^2 + 4y^2 = 4$ o $x^2 + y^2 = 1$ que, restringint-nos a $x < 0, y < 0$ és un quadrant de la circumferència de centre (0,0) i radi 1.

Qüestions de 5 punts

21. B. 11.

Per semblança de figures podem dir que si h és l'altura del triangle perpendicular a les bases dels trapezis, aleshores les altures dels trapezis i la del petit triangle del vèrtex de l'esquerra són $\dfrac{h}{12}$.
També per semblança podem dir que si la base del triangle paral·lela a les bases dels trapezis és és b, les longituds dels segments que delimiten les franges són $i \cdot \dfrac{b}{12}$ on $i \in \{1, 2, ..., 11\}$.



Per tant les àrees del triangle en el vèrtex i dels trapezis acolorits són $\dfrac{(0+1)}{144} \cdot \dfrac{bh}{2}$, $\dfrac{(2+3)}{144} \cdot \dfrac{bh}{2}$, ..., $\dfrac{(10+11)}{144} \cdot \dfrac{bh}{2}$, i la suma d'aquestes àrees serà $\dfrac{1+5+9+13+17+21}{144} = \dfrac{66}{144}$ de l'àrea $\dfrac{bh}{2} = 24$ del triangle.
Això és igual a 11 unitats d'àrea.

Nota: Per problemes tècnics en la impressió dels enunciats, aquest problema es va anul·lar.

22. E. 17.

Si tots hagueren dit la veritat, la suma de posicions seria:

$$1 + 2 + ... + 120 = \frac{1+120}{2} \cdot 120 = 7260.$$

Com la suma de les respostes es 5400, hi ha un defecte de 1860 com a conseqüència de les mentides. Suposem que menteixen n persones. El nombre mes petit de falses respostes es produirà quan les n mentides siguen el mes exagerades" possible. És a dir: el classificat en el lloc 120è diu que ha quedat el 1r, el classificat en el lloc 119è també diu que ha quedat el 1r, ..., el classificat en el lloc $121 - n$ diu que ha quedat el 1r.
Es produirà aleshores un defecte de:

$$119 + 118 + ... + 120 - n = \frac{(119 + 120 - n)n}{2} \geq 1860.$$

L'interval solució d'aquesta inequació pel que fa a nombres enters és $17 \leq n \leq 222$ i per tant la solució del problema és $n = 17$.

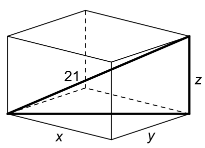
23. C. $\frac{8}{15}$.

Com que es tracta d'una probabilitat condicionada, en certa manera podem dir que l'univers de l'experiència quedarà restringit als resultats de les tirades dels tres daus que compleixin l'enunciat. Si ho analitzem detalladament veurem que són, indicant (primer dau, segon dau, tercer dau) els quinze següents:

(1,1,**2**), (1,**2**,3), (1,3,4), (1,4,5), (1,5,6), (**2**,1,3), (**2**,**2**,4), (**2**,3,5)
(**2**,4,6), (3,1,4), (3,**2**,5), (3,3,6), (4,1,5), (4,**2**,6), (5,1,6)

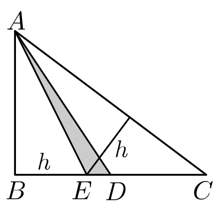
Com que dels 15 casos n'hi ha 8 on apareix el **2**, la probabilitat demanada, que haja eixit el 2 si el tercer dau és suma dels altres dos és $\frac{8}{15}$.

24. B. 784.



Les 12 arestes d'una caixa ortoèdrica són iguals de quatre en quatre. Si les anomenem x, y, z tindrem $4x + 4y + 4z = 140$ i per tant $x + y + z = 35$.
L'àrea és $A = 2xy + 2xz + 2yz$. Fent ús del teorema de Pitàgores, per a la diagonal de l'ortoedre podem escriure: $x^2 + y^2 + z^2 = 21^2$.
Per tant $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$ i d'aci $35^2 = 21^2 + A$ i això és $A = 784\text{cm}^2$.

25. C. 75 cm^2.



Si A_1 és l'àrea del triangle ABD i A_2 és l'àrea del triangle ABE aleshores l'àrea demanada és $A = A_1 - A_2$.
Com que D és el punt mitjà de BC és $BD = 20$ i l'àrea $A_1 = \frac{20 \cdot 30}{2} = 300$.

Com que E és un punt de la bisectriu les dues altures indicades com a h en la figura, una del triangle ABE i una altra del triangle AEC són iguals. Però la suma de les àrees d'estos dos triangles ha de ser la del triangle ABC, és a dir $\frac{30 \cdot h}{2} + \frac{50 \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 30}{2} = 600$. A partir d'aquí resulta $h = 15$, $A_2 = \frac{15 \cdot 30}{2} = 225$ i, finalment $A = A_1 - A_2 = 75$.

26. B. 225.

Inicialment la suma era $(1 + 2 + ... + 8) \cdot 8 = 288$.
Cada volta que esborrem dos nombres, la suma del conjunt disminueix en una unitat. Com que aquest procés es repeteix $8^2 - 1 = 63$ voltes fins que només queda un únic nombre, aquest serà 288 - 63 = 225

---

27. D. 34.

Per a comptar de quantes maneres diferents es pot descompondre la cadena en blocs formats per un o dos símbols, resoldrem un problema més general: de quantes maneres es pot descompondre una cadena de llargària n en blocs formats per un o dos símbols? Anomenem a_n a aquest nombre.

• És clar que la cadena d'un únic símbol es pot descompondre d'una única manera ($a_1 = 1$).

• Una cadena de dos símbols admet dues descomposicions ($a_2 = 2$). Per exemple ▬ • es pot interpretar com la lletra ▬ seguida de la lletra • o bé com una única lletra, ▬ •.

• Observem ara la cadena de tres símbols. El primer bloc, la primera lletra, pot estar formada per un o per dos símbols. En el primer cas, els altres dos símbols ja sabem que es poden descompondre de dues maneres, mentre que en el segon cas ens queda només un símbol, que es pot descompondre d'una única manera. Expressat amb una fórmula, $a_3 = a_2 + a_1$.

• De la mateixa manera, per a les cadenes de quatre símbols, en considerar la primera lletra trobem que $a_4 = a_3 + a_2$.

Així successivament podem establir que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, és a dir, cada terme és suma dels dos anteriors (com a la successió de Fibonacci!).
Aleshores resulta que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$ i $a_8 = 34$, que és el valor que ens demanen.

A la pàgina .., problema 30 nivell 3, podeu veure una solució concreta per a aquest cas.

---

28. E.178.

30 és un divisor de 2010, ja que $2010 = 30 \cdot 67$. Aleshores,

• Fent $x = 30$ tenim $3f(30) + 4f(67) = 210$

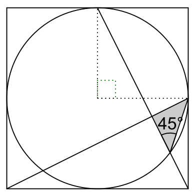
• Fent $x = 67$ tenim $3f(67) + 4f(30) = 469$

Si resolem el sistema format amb les dues equacions anteriors obtenim:
$f(30) = 178$.

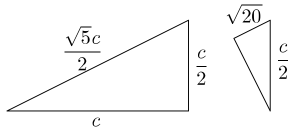
---

29. A. 20.

Si observem els dos triangles rectangles que es formen amb les dues línies que dibuixem i el triangle rectangle petit, semblant als anteriors, que també queda dibuixat, conclourem de seguida que les dues rectes són perpendiculars i, doncs, el triangle T és rectangle.



L'angle inferior de T és de 45° ja que és un angle inscrit i per tant serà la meitat que l'angle central corresponent que és de 90°. Per tant T és un triangle rectangle isòsceles.



Com que l'àrea de T és de 10 unitats d'àrea, si x n'és el catet serà $\dfrac{x^2}{2} = 10$, és a dir $x = \sqrt{20}$. Ara fem ús de la semblança entre els triangles rectangles esmentats. Amb les dades que es poden veure a la figura, on hem posat c el costat del quadrat i hem fet un càlcul pel teorema de Pitàgores, obtenim $\dfrac{c/2}{\sqrt{20}} = \dfrac{\sqrt{5}c/2}{c/2}$ d'on resulta $c = 20$.

30. B. 28.

Si la probabilitat de quedar al mateix grup és $\dfrac{1}{2}$, també serà $\dfrac{1}{2}$ la probabilitat de quedar a grup diferent. Imaginem que primer de tot s'assigna un i immediatament després l'altre; això no influeix en el càlcul de la probabilitat. Vist així la probabilitat de quedar tots dos al grup A és $\dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{a-1}{a+b-1}$ i la de quedar tots dos al grup B és $\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{b-1}{a+b-1}$ i la probabilitat de quedar en dos grups diferents és $2 \cdot \dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{b}{a+b-1}$. Si igualem la probabilitat total de quedar al mateix grup amb la de quedar a grups diferents, operem i simplifiquem, ens trobarem amb $a^2 - a + b^2 - b = 2ab$ o, equivalentment, $a^2 + b^2 - 2ab = a + b$ és a dir $(b-a)^2 = a + b$. Com que $40 \leq a + b \leq 60$ l'únic valor possible és $a + b = 49$ i $b - a = 7$, que ens porta a $a = 21, b = 28$.