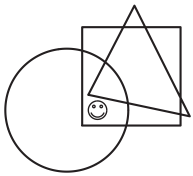
Cangur SCM 2009 Nivell 1

Qüestions de 3 punts

1. (*França*) Quin dels nombres següents és parell?

A) 2009 B) 2+0+0+9 C) $200 - 9$ D) 200×9 E) $200 + 9$

2. (*Àustria*) On es troba el ☺?



A) Dins del cercle i del triangle, però no dins del quadrat.
B) Dins del cercle i el quadrat, però no dins del triangle.
C) Dins del triangle i del quadrat, però no dins del cercle.
D) Dins del cercle, però no dins del cercle ni del triangle.
E) Dins del quadrat, però no dins del cercle ni del triangle.

3. (*Catalunya*) Quants nombres enters hi ha entre 2,009 i 19,03?

A) 16 B) 17 C) 14 D) 15 E) Més de 17

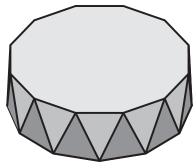
4. (*Rússia*) Quina és la quantitat més petita de xifres que cal esborrar en el nombre 12323314 per tal de trobar un nombre capicua?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. (*Ucraïna*) Tenim tres capses: una de color blanc, una altra de color vermell i una darrera de color negre. Una d'elles és buida, en una hi ha una poma, i a l'altra una barra de xocolata. Trobeu de quin color és la capsa on hi ha la xocolata si sabem que la xocolata és a la capsa blanca o a la capsa vermella, i la poma no és ni a la capsa blanca ni a la capsa negra.

A) Blanca
B) Vermella
C) Negra
D) Vermella o negra
E) És impossible de saber

6. (*Catalunya*) Un *antiprisma* és un políedre que té dues bases ques són polígons iguals i cadascun dels vèrtexs d'una base s'uneix amb dos vèrtexs de l'altra base, de manera que les cares laterals són triangles. La figura mostra un antiprisma.
Quantes cares té un antiprisma en què les bases són polígons de 2009 costats?

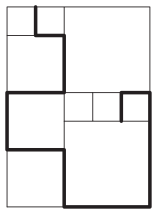


A) 4020 B) 2011 C) 4018 D) 6027 E) 4022

7. (*Croàcia*) S'ha construït un pont sobre un riu. El riu té una amplària de 120 metres. Un quart del pont està damunt la ribera esquerra del riu i un altre quart està damunt la ribera dreta del riu. Quant amida el pont?

A) 150 m B) 180 m C) 210 m D) 240 m E) 270 m

8. (*Eslovàquia*) En la figura hi ha quadrats de tres mides diferents. El costat del quadrat més petit amida 20 cm. Quina és la llargada de la línia gruixuda?

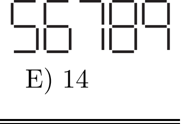


A) 380 cm B) 400 cm C) 420 cm D) 440 cm E) 1680 cm

9. (*Rússia*) En una habitació hi ha gats i gossos. El nombre de potes dels gats és el doble que el nombre de nassos dels gossos. Aleshores el nombre de gats és:

A) El doble del nombre de gossos B) Igual al nombre de gossos
C) Quatre vegades el nombre de gossos D) $\frac{1}{4}$ del nombre de gossos
E) La meitat del nombre de gossos

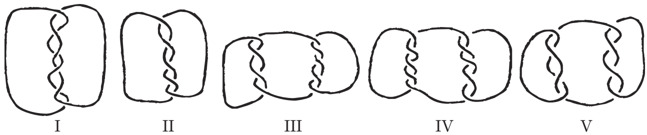
10. (*Rússia*) Amb bastonets idèntics es poden formar xifres tal com es veuen al dibuix. Direm que el pes d'un nombre és la quantitat de bastonets que calen per a formar-lo. Quin és el pes del nombre de dues xifres que pesa més?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

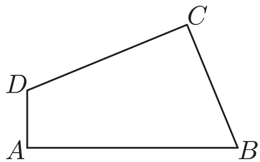
Qüestions de 4 punts

11. (*Suïssa*) En quines de les figures següents hi ha més d'un tros de corda?



A) I, III i V
B) III, IV i V
C) I, III, IV i V
D) En totes
E) En cap

12. (*Bielorrússia*) El quadrilàter $ABCD$ té els costats $AB = 11$, $BC = 7$, $CD = 9$ i $DA = 3$, i els angles A i C són rectes. Quina és l'àrea del quadrilàter?

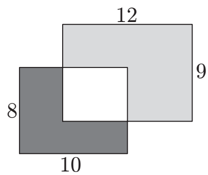


A) 48 B) 44 C) 30 D) 52 E) 60

13. (*Croàcia*) En un grup de dansa hi ha 39 nois i 23 noies. Cada setmana entren 6 nois i 8 noies més al grup. Al cap d'unes quantes setmanes el grup té el mateix nombre de nois que de noies. Quan això es compleix, quantes persones hi ha en total al grup de dansa?

A) 144 B) 154 C) 164 D) 174 E) 184

14. (*Holanda*) Dos rectangles de 8×10 i 9×12 se superposen en part l'un sobre l'altre. L'àrea de la part grisa fosca és 37. Quina és l'àrea de la part grisa clara?

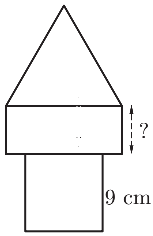


A) 60 B) 62 C) 62,5 D) 64 E) 65

15. (*Brasil*) Es posen vuit cartes numerades de l'1 al 8 dins de dues caixes A i B, de manera que la suma dels valors numèrics de les cartes de les dues caixes dóna el mateix. Si només hi ha 3 cartes a la caixa A, aleshores podem estar segurs que a la caixa B:

A) Hi ha tres cartes amb nombre imparell
B) Hi ha quatre cartes amb nombre parell
C) No hi ha el nombre 1
D) Hi ha el nombre 2
E) Hi ha el nombre 5

16. (*Eslovàquia*) La *torre* del dibuix està formada per tres figures: un quadrat, un rectangle i un triangle equilàter. Les tres figures tenen el mateix perímetre. El costat del quadrat fa 9 cm. Quina és la longitud del costat del rectangle que està senyalat?



A) 4 cm B) 5 cm C) 6 cm D) 7 cm E) 8 cm

17. (*Itàlia*) Volem omplir una caixa de $40 \times 40 \times 60$ amb cubs iguals. Quin és el nombre mínim de cubs que es necessiten?

A) 6 B) 12 C) 46 D) 12000 E) 96000

18. (*Brasil*) En Francesc comença a llegir un llibre de 290 pàgines un diumenge. Cada diumenge llegeix 25 pàgines i els altres dies, 4 pàgines. Quants dies haurà emprat per a llegir tot el llibre?

A) 5 B) 46 C) 40 D) 35 E) 41

19. (*Croàcia*) L'Antoni, la Benazir, en Carles i la Diana han quedat als quatre primers llocs d'un torneig d'escacs. Si sumes els números que indiquen el lloc que han ocupat l'Antoni, la Benazir i la Diana, s'obté el nombre 6. S'obté el mateix nombre si sumes els llocs ocupats per la Benazir i en Carles. Qui ha quedat en primer lloc, si la Benazir s'ha classificat per davant de l'Antoni?

A) Antoni B) Benazir C) Carles D) Diana E) No es pot saber

20. (*Suècia*) La Isabel agafa 2009 peces quadrades iguals i les posa totes de manera que formen un únic rectangle del tot ple de peces no superposades. Quants rectangles diferents pot construir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

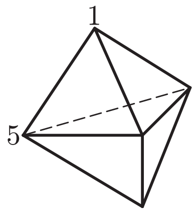
Qüestions de 5 punts

21. (*Ucraïna*) Tenim quatre afirmacions sobre un nombre enter positiu N:
- N és divisible per 5.
- N és divisible per 11.
- N és divisible per 55.
- N és més petit que 10.

Sabem que dues de les afirmacions són certes i que les altres dues són falses. Aleshores N és el nombre:

A) 1 B) 5 C) 10 D) 11 E) 55

22. (*Mèxic*) La figura mostra un sòlid format per 6 cares triangulars. Hi ha un nombre a cada vèrtex. Per cada cara, consideram la suma dels tres nombres situats als vèrtexs de la cara. Si totes les sumes donen el mateix i dos dels nombres són 1 i 5 com es mostra a la figura, quina és la suma dels 5 nombres?

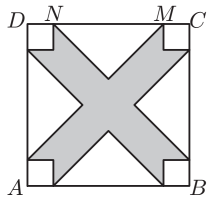


A) 9 B) 12 C) 17 D) 18 E) 24

23. (*Catalunya*) Les habitacions d'un hotel estan numerades amb tres xifres. La primera indica el pis i les altres dues el número de l'habitació. Per exemple, 325 indica l'habitació número 25 del tercer pis. L'hotel té un total de 5 pisos numerats de l'1 al 5 amb 35 habitacions cadascun. Al tercer pis les habitacions van de la 301 a la 335. Quantes vegades s'usa la xifra 2 per a numerar totes les habitacions?

A) 60 B) 65 C) 95 D) 100 E) 105

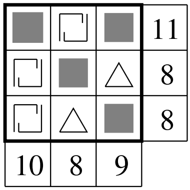
24. (*Estònia*) $ABCD$ és un quadrat amb els costats de llargària 10 cm. La distància del punt N al punt M és 6 cm. Totes les regions blanques representen triangles isòsceles iguals o quadrats iguals. Calcula l'àrea de la regió grisa dins del quadrat $ABCD$.



A) 42 cm^2 B) 46 cm^2 C) 48 cm^2 D) 52 cm^2 E) 58 cm^2

---

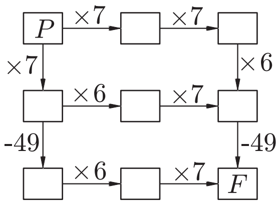
25. (*Regne Unit*) Es dóna el total de cada fila i de cada columna. Quin és el valor de ■ + ⧠ − △?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

---

26. (*Catalunya*) El Cangur pensa un nombre enter i el col·loca a la caixa P. Aleshores segueix un dels següents camins indicats per fletxes i realitza les operacions corresponents. Pot trobar el Cangur el nombre 2009 en arribar a la caixa F?



A) Sí, anant pels tres camins possibles.

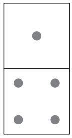
B) Sí, anant per dos dels camins i començant amb el mateix nombre a ambdós camins.

C) Sí, anant per dos dels camins, i començant amb un nombre diferent en cada camí.

D) Sí, anant només per un camí possible.

E) No, no és possible.

27. (*Itàlia*) Un conjunt complet de 28 peces de dòmino conté cada combinació possible de dos nombres entre 0 i 6, ambdós inclusivament, incloent-hi dues vegades el mateix nombre. Quants punts hi ha, en total, en les 28 peces?



A) 84 B) 105 C) 126 D) 147 E) 168

28. (*Brasil*) En una taula 4×2, hi ha dos nombres escrits a la primera fila. Els nombres de la fila següent es calculen fent la suma i la diferència dels nombres que hi ha en la fila anterior (vegeu l'exemple del dibuix). Si en una taula 7×2 emplenada de la mateixa manera, els nombres de la darrera fila són 96 i 64, quant val la suma dels nombres de la primera fila?

10	3
13	7
20	6
26	14

A) 8 B) 10 C) 12 D) 20 E) 24

29. (*Itàlia*) En el país de Peugraciós, tothom té el peu esquerre un o dos números més gran que el peu dret. Les sabates, però, es venen en parelles del mateix número. De cara a estalviar, un grup d'amics decideixen comprar sabates junts: compren sabates i en sobren dues: una sabata del número 36 i l'altra del número 45. Quants d'amics hi ha com a mínim en el grup?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

30. (*Mèxic*) Volem acolorir els quadrats de la graella fent servir colors A, B, C i D, de manera que dos quadrats veïns no tenguin el mateix color. (Quadrats que comparteixen un vèrtex es consideren veïns.) Hem acolorit alguns quadrats com s'indica a la figura. De quin color podem pintar el quadrat gris?

A	B		C	D

A) A B) B C) C D) D E) Hi ha dues possibilitats diferents

Premis i mencions

Primer premi

Eric Milesi Vidal (Pare Manyanet, Barcelona), 150.0 punts

Premis per al pòdium

Xavier Cabanes Bosacoma (IES Maragall, Barcelona), 146.25 punts
Joan Prunera Olivó (IES Escola Industrial, Sabadell), 143.75 punts

Premis de categoria A

David Balaghi Buil (Aula Escola Europea, Barcelona), 142.0 punts
Marcel Catà Villa (IES Damià Campeny, Mataró), 141.25 punts
Júlia Alsina Oriol (IES Jaume Callís, Vic)
i Oscar Roldán Blay (València), 138.75 punts

Premis de categoria B, ex aequo

Gabriel Comerón Castillo (IES d'Argentona, Argentona),
Jaume De Dios Pont (Tecnos, Terrassa),
Aran García Vidal (IES Lluís de Peguera, Manresa),
Aleix Soriano de Haro (Nuestra Señora del Rosario, Barcelona) i
Andreu Viñets Alonso (IES Vil·la Romana, La Garriga), 135.0 punts

Premis de categoria C

Gerard Moreno Giménez (IES Joan Amigó i Callau, L'Espluga de Francolí), 134.75 punts
Xavier Couñago González (IES L'Alzina, Barcelona)
i Lluís Isern López (IES Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 133.75 punts
Darío Nieuwenhuis Nivela (Aula Escola Europea, Barcelona)
i Celia Traver Abella (IES Ramón Cid, Benicarló), 132.5 punts

Premis de categoria D

Roger Laguarta Alapont (IES Lluís de Peguera, Manresa), 131.25 punts
Roser Pérez Dalmau (IES de Palamós, Palamós), 131.0 punts
Jordi Barceló Mercader (Jesús Maria, Badalona), 130.0 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Miquel Rossy Sesé (La Farga, Sant Cugat del Vallès), 129.75 punts
Clara Carrera Moreno (IES Angeleta Ferrer, Sant Cugat), 128.75 punts
Irene Peralta Garcia (IES Vil·la Romana, La Garriga), 128.25 punts
Albert Comas Llagostera (IES Montsacopa, Olot),
Adrià Fernández Díaz (IES Consell de Cent, Barcelona)
i Joan Grau Leguía (IES Les Corts, Barcelona), 127.5 punts
Daniel García García (Nuestra Señora del Rosario, Barcelona), 126.25 punts
Adrià Duran Sidera (IES Castell d'Estela, Amer), 126.0 punts
Celia Franch López (Aula Escola Europea, Barcelona)
i Albert Sancristòfol Parés (IES Pius Font i Quer, Manresa), 125.0 punts
Alfons Ahicart Villach (IES Alfonso XIII, Vall d'Alba),
Marc Balsà Diaz (Lestonnac-l'Ensenyança, Lleida),
Roberto Mateo García (IES Joanot Martorell, Valencia)
i Aleix Villamor Orra (Sagrat Cor de Jesús, Vic), 123.75 punts
Víctor Ibáñez Molina (IES Serra d'Espadà, Onda), 123.5 punts
Jordi Clua Miras (Regina Carmeli, Rubí), 123.25 punts
Vera Cuervo Rojman (IES Leonardo da Vinci, Sant Cugat del Vallès),
Marc Sánchez Alfonso (Aula Escola Europea, Barcelona),
Oriol Esquivias Bautista de Lisbona (Escola Pia Nostra Senyora, Barcelona),
i David Portabella de Predo (Escola Pia de Mataró, Mataró), 122.5 punts
Dolça Tellols Asensi (IES Vicent Sos Baynat, Castelló de la Plana)
i Gerard Fabregó Serrat (Sagrats Cors, Centelles), 122.25 punts
Eduardo Atao Salazar (Sagrado Corazón de Jesús, Terrassa), 122.0 punts
David Masip Bonet (IES Pons d'Icart, Tarragona), 121.75 punts
Eloi Bigas Vila (IES Costa i Llobera, Barcelona),
Nicolas Blasco Arnanz (IES Vicent Sos Baynat, Castelló de la Plana)
i Marc Ballbé Ferrero (Aula Escola Europea, Barcelona), 121.25 punts
Adrià Gil Sorribes (IES Lluís Domènech i Montaner, Reus),
Pau Moncusí Pino (IES Gabriel Ferrater i Soler, Reus)
i Marc Gort Mas (Brianxa, Tordera), 121.0 punts
Joan Estruch García (Abecé, Gandia), 120.75 punts
Tiaré Galvez Calicó (Thau, Barcelona),
Lluís Garcia Pons (IES Llobregat, Sallent)
i Jordi Piqué Sellés (IES d'Almenar, Almenar), 120.0 punts
David Sesto Castilla (IES Torre Roja, Viladecans),
Nil Ramon Cañellas (IES Fonts de la Glorieta, Alcover)
i Ariadna Alarcón Calvet (La Salle, Girona), 119.75 punts

Marc Falcó Pallarès (IES Santiago Sobrequés i Vidal, Girona)
i Pol Olivella Farell (Aula Escola Europea, Barcelona), 119.5 punts
Erik Martínez Ramírez (Sagrada Família-Horta, Barcelona),
Marc Far Ruiz (Montessori-Palau, Girona),
Claudia Álvarez Pujol (Sant Pau, Barcelona),
Oriol Argelagós López (IES de Terrassa, Terrassa),
Arcadi Garcia Rius (IES Benigasló, La Vall d'Uixò),
Jordi Solà Montserrat (IES Narcís Oller, Valls),
Pau Pérez Casas (IES d'Auro, Santpedor),
i Xavier Jarque Vilella (IES Gabriel Ferrater, Reus), 118.75 punts
Arnau Escapa Farrés (IES Pau Vila, Sabadell),
i Àlex Pujol Garcia (IES Màrius Torres, Lleida), 118.25 punts

Cangur SCM 2009 Nivell 1

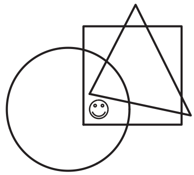
Qüestions de 3 punts. Solucions

1. D. 1800.

Els nombres donats són 2009, 11, 191, 1800, 209. És clar que l'únic que és parell és el quart.

2. B.

Una observació acurada mostra que el ☺ es troba dins del cercle i del quadrat, però no dins del triangle.



3. B. 17.

Entre 2,009 i 19,03 hi ha els nombres enters des del 3 fins al 19, inclosos, cosa que representa 17 nombres enters.

4. C. 3.

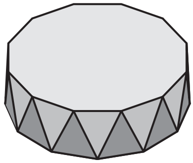
S'observa que el 4 no pot aparèixer en el nombre capicua que busquem i que només traient una altra xifra no aconseguim un capicua. Ara bé, si traiem el primer 2, l'últim 3 i el 4 o també si traiem el 4 i els dos 2 aconseguim el que ens demanaven.

5. A. Blanca.

Si sabem que la poma no és ni a la capsa blanca ni a la capsa negra és que la poma és a la capsa vermella. Combinant aquesta condició amb l'altra que s'enuncia, a saber, que la xocolata és a la capsa blanca o a la capsa vermella deduim que la xocolata és a la capsa blanca.

6. A. 4020.

Les cares de l'antiprisma són: Un triangle per cada costat de la base superior, un triangle per cada costat de la base inferior i les dues bases. En total $2 \times 2009 + 2 = 4020$.

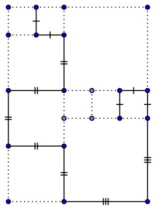


7. D. 240 m.

La part del pont que queda sobre el riu és $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Si la meitat del pont són 120 m, la longitud total és de 240 m.

8. C. 420.

Les mides dels costats dels quadrats són 20, 40 i 60 cm. La línia gruixuda està formada per 5 costats de quadrat petit, 5 costats de quadrat mitjà i 2 costats de quadrat gros. La llargada total és doncs $5 \times 20 + 5 \times 40 + 2 \times 60 = 420$.

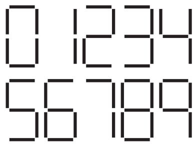


9. E. La meitat del nombre de gossos.

Com que cada gos té un nas, l'enunciat equival a dir que el nombre de potes dels gats és el doble que el nombre de gossos. És a dir el quàdruple del nombre de gats és igual al doble del nombre de gossos. I d'aquí es dedueix ràpidament la solució enunciada.

10. E. 14.

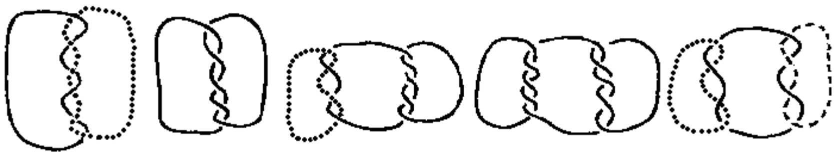
La xifra que pesa més és el 8, que és l'única que té un pes de 7. Per tant el nombre de dues xifres que pesa més és el 88, que pesa 14.



Qüestions de 4 punts. Solucions

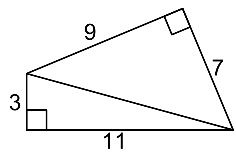
11. A. I, III i V.

La figura mostra que en l'esquema I i en el III hi ha dos trossos de corda enllaçats i en el V, tres.



12. A. 48.

El quadrilàter està format juxtaposant dos triangles rectangles. L'àrea d'un triangle rectangle es pot obtenir multiplicant els dos catets i dividint per dos. L'àrea buscada serà doncs $\dfrac{63}{2}+\dfrac{33}{2}=48$.

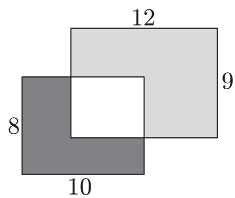


13. D. 174.

Actualment hi ha 16 nois més que noies. Si cada setmana van entrant dues noies més que nois fan falta 8 setmanes perquè s'igualin el nombre de noies i el de nois. Durant aquestes setmanes s'hauran incorporat 48 nois i 64 noies, que fan un total de 87 nois i 87 noies, és a dir 174 persones.

14. E. 65.

L'àrea del rectangle de 8×10 és 80. Si la part de color gris fosc té àrea 37 l'àrea del rectangle blanc és $80-37=43$. L'àrea del rectangle de 9×12 és 108. Si li restem la part blanca tindrem l'àrea demanada: $108-43=65$.



15. D. A la caixa B hi ha el 2.

Com que la suma dels nombres de l'1 al 8 és 36, les cartes de cada caixa hauran de sumar 18. Com que han de sumar un nombre parell, les tres cartes de la caixa A podran ser 3 cartes parells o 1 carta parell i 2 imparells, i per tant a la caixa B hi haurà, segons els dos casos, 1 carta parell i 4 imparells o bé 2 i 2. Estem segurs, doncs, que les opcions de resposta A) i B) no són correctes. En el primer cas les cartes de la caixa A només poden ser el 4, el 8 i el 6. En el segon cas poden ser $8+7+3$ o bé $7+6+5$. Per tant la carta 1 segur que és a la caixa B (i l'opció de resposta C) és incorrecta); la carta 2 segur que és a B (resposta correcta) i, tot i que hi pot ser, no podem estar segurs que el 5 estigui a B perquè també pot ser que no hi sigui.

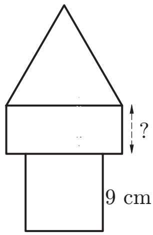
16. C. 6 cm.

El perímetre de cada figura serà 36 cm, com el del quadrat.

El costat del triangle serà, doncs, $\dfrac{36}{3} = 12$ cm.

El rectangle central té dos costats de 12 cm.

Cadascun dels altres dos farà $\dfrac{36 - 2 \cdot 12}{2} = 6$ cm.



17. B. 12.

Per fer servir la mínima quantitat de cubs hem de procurar que tinguin l'aresta el més gran possible, que haurà de ser el màxim comú divisor de 40 i 60, és a dir 20. Si omplim la caixa amb cubs d'aresta 20 necessitem $2 \times 2 \times 3$ cubs.

18. E. 41.

De diumenge a dissabte llegeix $25 + 6 \cdot 4 = 49$ pàgines. Si dividim 290 per 49 veurem que després de 5 setmanes li queden per llegir 45 pàgines, que li ocuparan exactament de diumenge a divendres. En total, doncs, haurà emprat $7 \cdot 6 + 6 = 41$ dies per llegir tot el llibre.

19. D. Diana.

Com que els lloc en què han quedat sumen 6 resulta que Antoni, Benazir i Diana han quedat en els tres primers llocs i, per tant, Carles serà el 4t. Com que les posicions de Carles i Benazir sumen 6, ella serà la 2a. Com que Benazir s'ha classificat més endavant que l'Antoni, ell serà el 3r i Diana la guanyadora.

20. A. 3.

Com que la descomposició en factors primers de 2009 és $2009 = 7^2 \cdot 41$ resulta que les úniques descomposicions de 2009 com a producte de dos factors, sense tenir en compte l'ordre, són $1 \cdot 2009$, $7 \cdot 287$ i $49 \cdot 41$, que ens determinen els tres possibles rectangles.

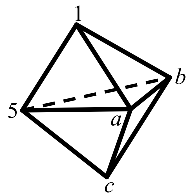
Qüestions de 5 punts. Solucions

21. B. 5.

La primera i la segona alhora no poden ser certes perquè també ho seria la tercera i, recíprocament, la tercera no pot ser certa perquè també ho serien la primera i la segona. Per tant forçosament és certa la quarta afirmació i per tant no pot ser-ho la segona i sí que ho és la primera.

22. C. 17.

Els nombres de les cares superiors sumen $6+a$, $6+b$ i $1+a+b$. Si totes les cares han de sumar igual es dedueix en primer lloc que $a=b$ i tot seguit que $a=b=5$ i que la suma de cada cara superior és 11. Les cares inferiors sumen $10+c$ i, doncs, $c=1$. La suma dels cinc nombres és 17.

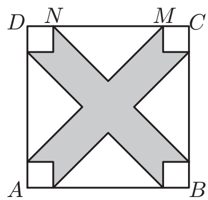


23. E. 105.

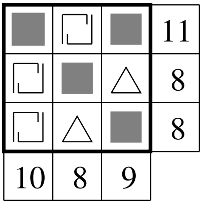
S'hauran fet servir 35 dosos per la primera xifra de cada habitació del segon pis i, a més, 14 dosos en cada pis per escriure les dues últimes xifres (en les habitacions $\star 02, \star 12, \star 20, \star 21, \star 22, ..., \star 29, \star 32$). En total, doncs, $5 \cdot 14 + 35 = 105$.

24. C. 48 cm^2.

Cada parella de triangles isòsceles poden compondre un quadrat de diagonal 6 cm, del qual podem calcular l'àrea "com si fos un rombe": $\dfrac{6 \cdot 6}{2}$, i per tant entre els quatre triangles isòsceles abastaran 36 cm^2. El costat de cada quadradet dels racons és de 2 cm. Per tant entre tots quatre tenen àrea $4 \cdot 2^2 = 16$. L'àrea demanada és $100 - 36 - 16 = 48$.



25. C. 6.

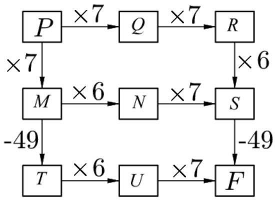


Si sumem la fila superior i la columna de l'esquerra dóna 21 i hi tenim tres vegades □+■. Per tant □+■ =7. Si ara mirem la fila inferior deduirem de seguida que el triangle ha de ser igual a 1. Per tant ■+□−△ = 6.

26. B. Anant per dos dels camins i començant amb el mateix nombre.

Si observem amb atenció veurem que pels dos camins $PQRS$ i $PMNS$ s'arriba a la casella S amb el resultat de multiplicar per 294 el nombre amb què havíem començat. Perquè després arribem a F amb el 2009 caldria que a S hi hagués el nombre $2009 + 49 = 2058$ que és $2058 = 294 \cdot 7$. Per tant començant amb el 7, tant si anem per $PQRS$ com per $PMNS$ acabem amb el 2009.

Si examinem el tercer camí possible, $PMTU$, veurem que no és possible aconseguir el 2009 ja que, perquè fos així, a la casella T hauríem de tenir un nombre enter que multiplicat per $6 \times 7 = 42$ donés 2009, però 42 no és un divisor de 2009.



27. E. 168.

Cada número del 0 al 6 apareix exactament en set peces del dòmino i entre aquestes hi ha la peça doble. Per tant, cada número apareix exactament vuit vegades i la suma serà $8 \cdot (0 + 1 + 2 + ... + 6) = 8 \cdot 21 = 168$.

Una altra manera de raonar que cada número surt 8 vegades és la consideració que hi ha 8 peces, per tant 56 nombres i cada nombre dels 7 possibles (del 0 al 6, inclosos) ha de sortir el mateix nombre de vegades, $\frac{56}{7} = 8$.

28. D. 20.

So continueu la taula que es mostra a la dreta veureu que a la setena fila apareixen els nombres $8a$ i $8b$. Per tant si hi tenim 96 i 64 és que a la fila inicial hi havia 12 i 8, que sumen 20.

a	*b*
a+b	*a-b*
2a	*2b*
2a+2b	*2a-2b*
4a	*4b*
⋮	⋮

També es podria raonar ”a la inversa”. Per passar de cada fila a la superior sumem els dos nombres i dividim per 2 i posem el resultat a la casella de dalt a l’esquerra; restem el nombre de l’esquerra menys el de la dreta i ho dividim per dos i ho posem a la casella de dalt a la dreta. Si apliquem aquest procediment successivament també arribem, naturalment als valors 12 i 8.

29. A. 5.

El parell més petit que han comprat és del número 36 i el més gran del 45. Entre el 36 i el 45 hi ha nou números de diferència. Per tal que el nombre d’amics sigui mínim, les diferències entre el peu dret i l’esquerre d’aquests amic ha de ser el màxim de vegades 2, és a dir quatre vegades 2 i una vegada 1. Això fa que el mínim de persones sigui 5.

Un exemple concret, on amb (a, b) s’indiquen les mides del peu dret i el peu esquerre, seria el d’una colla de 5 amics amb aquests números de peu (36,38), (38,40), (40,42), (42,44), (44,45) que haurien comprat 6 parells de sabates, un parell de cada un dels números 36, 38, 40, 42, 44 i 45.
Els números poden variar d’un exemple a un altre però, en tot cas, per passar del 36 al 45 amb salts d’un o dos el mínim s’assoleix quan es fa un salt d’1 i quatre de 2.

30. A.

A la casella buida de la primera fila hi podem posar A o D.

Si hi posem A podem observar que a sota d'aquesta A només hi pot anar D i que l'única manera de completar la segona fila és $DCDBA$ i, semblantment, veurem que la tercera fila ha de ser $ABACD$ i la quarta $DCDBA$.

Si a la casella buida de la primera fila hi posem D l'única manera d'omplir les files successives és $DCABA$, $ABDCD$ i $DCABA$.

En tots dos casos la casella grisa queda plena amb la lletra A.

A	B		C	D

Qüestions de 3 punts

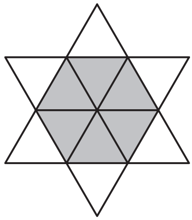
1. (*França*) Quin dels nombres següents és parell?

A) 2009 B) $2+0+0+9$ C) $200-9$ D) 200×9 E) $200+9$

2. (*Hongria*) En una festa hi havia 4 nois i 4 noies. Els nois només van ballar amb noies i les noies només van ballar amb nois. Després van preguntar a tothom amb quantes persones havien ballat. Els nois van contestar: 3, 1, 2, 2. Tres de les noies van dir: 2, 2, 2. Quin nombre va dir la quarta noia?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. (*Eslovàquia*) L'estrella del dibuix està formada per 12 triangles equilàters petits. El perímetre de l'estrella és de 36 cm. Quin és el perímetre de l'hexàgon gris?

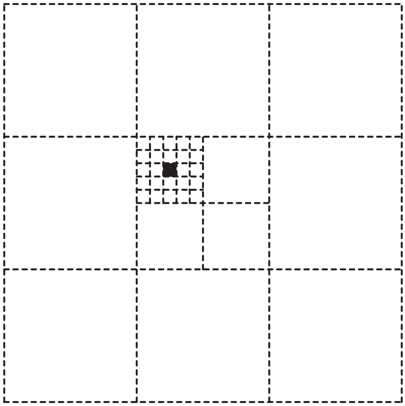


A) 12 cm B) 6 cm C) 24 cm D) 30 cm E) 18 cm

4. (*Holanda*) En Harry reparteix paquets al carrer Major. Ha de lliurar un paquet a cada una de les cases que tenen un nombre senar i de manera correlativa, començant per la que porta el número 15 i acabant per la que porta el número 53. A quantes cases ha de lliurar paquets en Harry?

A) 19 B) 20 C) 27 D) 38 E) 53

5. (*Estats Units d'Amèrica*) L'àrea del quadrat gran és 1. Quina és l'àrea del quadrat petit negre?



A) $\dfrac{1}{100}$

B) $\dfrac{1}{300}$

C) $\dfrac{1}{600}$

D) $\dfrac{1}{900}$

E) $\dfrac{1}{1000}$

6. (*Holanda*) El producte de quatre enters positius diferents és 100. Quant val la seva suma?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

7. (*Rússia*) En una habitació hi ha gats i gossos. El nombre de potes dels gats és el doble que el nombre de nassos dels gossos. Aleshores el nombre de gats és:

A) La meitat del nombre de gossos

B) Igual al nombre de gossos

C) El doble del nombre de gossos

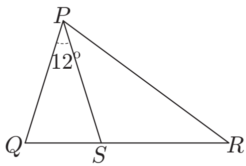
D) $\dfrac{1}{4}$ del nombre de gossos

E) Quatre vegades el nombre de gossos

8. (*Ucraïna*) Un ascensor té una capacitat per a 12 adults o 20 nins. Quants nins poden anar com a màxim amb 9 adults?

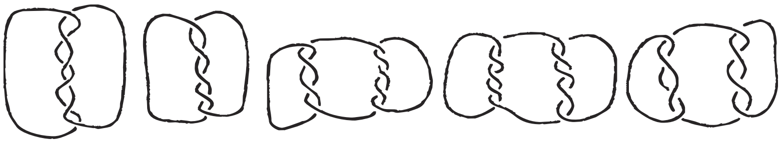
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

9. (*Regne Unit*) A la figura de la dreta, QSR és una línia recta. $\widehat{QPS} = 12°$ i $PQ = PS = RS$. Quant mesura l'angle $\widehat{QPR}$?



A) 42° B) 60° C) 36° D) 84° E) 54°

10. *(Suïssa)* En quines de les figures següents hi ha més d'un tros de corda?



I II III IV V

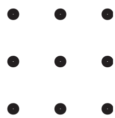
A) I, III i V
B) III, IV i V
C) I, III, IV i V
D) En totes
E) En cap

Qüestions de 4 punts

11. (*Rússia*) Per quants nombres enters positius necessitem la mateixa quantitat de xifres per a escriure el seu quadrat que per a escriure el seu cub?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 9 E) Una quantitat infinita

12. (*Bielorrússia*) Quin és el nombre mínim de punts que cal llevar de la figura, de manera que no hi quedin tres punts alineats?

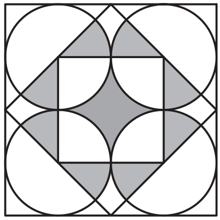


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

13. (*Rússia*) En Nicolau ha mesurat els 6 angles de dos triangles, un d'ells acutangle i l'altre obtusangle. Recorda quatre d'aquests angles: $120°$, $80°$, $55°$ i $10°$. Quin és l'angle més menut del triangle acutangle?

A) $5°$ B) $10°$ C) $45°$ D) $55°$ E) No és possible determinar-lo

14. (*Regne Unit*) Quina part del quadrat exterior està ombrejada?

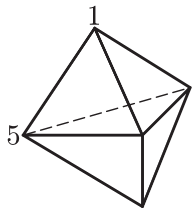


A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi+2}{16}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

15. (*Ucraïna*) En una illa remota unes quantes persones sempre diuen la veritat i la resta menteixen sempre. 25 persones d'aquesta illa estan col·locades en fila índia. La primera persona de la cua diu que totes les altres són mentideres. Totes les altres persones de la cua diuen que la persona que tenen al davant és mentidera. Quantes persones mentideres hi ha a la cua?

A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) És impossible saber-ho

16. (*Mèxic*) La figura mostra un sòlid format per 6 cares triangulars. Hi ha un nombre a cada vèrtex. Per cada cara, consideram la suma dels tres nombres situats als vèrtexs de la cara. Si totes les sumes donen el mateix i dos dels nombres són 1 i 5 com es mostra a la figura, quina és la suma dels 5 nombres?



A) 12 B) 24 C) 18 D) 9 E) 17

17. (*Bielorrússia*) En la igualtat $\dfrac{E \cdot I \cdot G \cdot H \cdot T}{F \cdot O \cdot U \cdot R} = T \cdot W \cdot O$ lletres distintes signifiquen dígits distints, mentre que lletres iguals signifiquen dígits iguals. Quants resultats diferents pot donar el producte $T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E$?

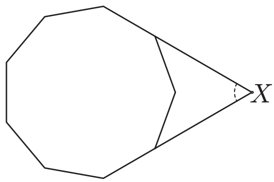
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. (*Mèxic*) Volem pintar els quadrats de la taula utilitzant els colors A, B, C i D de tal manera que els quadrats veïns no tinguin el mateix color (els quadrats que comparteixen un vèrtex es consideren veïns). Alguns dels quadrats ja han estat pintats amb els colors com es mostra. Quins són els possibles colors per al quadrat gris?

A	B			
C	D			
		B		
				(gris)
B				

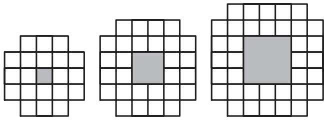
A) A o B B) C o D C) Només D D) Només C E) A, B, C o D

19. (*Regne Unit*) El diagrama ens mostra un eneàgon regular (un polígon de 9 costats). Quant mesura l'angle X?



A) 40° B) 45° C) 50° D) 55° E) 60°

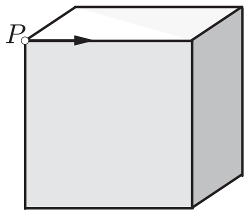
20. (*Estònia*) Es mostren els tres primers elements d'una successió. Sense comptar el forat quadrat, representat per la regió grisa, quants quadrats unitaris es necessiten per a construir el desè element d'aquesta successió?



A) 76 B) 80 C) 84 D) 92 E) 100

Qüestions de 5 punts

21. (*Holanda*) Començant des del punt P, ens movem al llarg de les arestes per l'exterior del cub, començant en la direcció de la fletxa. Al final de l'aresta hem de triar entre anar cap a l'esquerra o cap la dreta. A la fi de la segona aresta hem de triar de nou, i així successivament. Elegim alternativament dreta i esquerra. Quantes arestes hem de recórrer per tornar al punt P per primera vegada?



A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

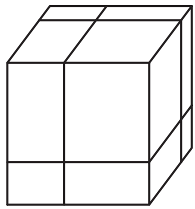
22. (*Ucraïna*) Quants nombres de deu xifres podem compondre fent servir només les xifres 1, 2 i 3 en els quals la diferència entre dues xifres consecutives siga 1?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

23. (*Ucraïna*) Tots els divisors d'un nombre N, diferents de N i de 1, s'escriuen en una línia. Un cop fet això, veiem que el més gran d'aquests divisors és 45 vegades més gran que el més petit. Quants nombres N hi ha que compleixin aquesta condició?

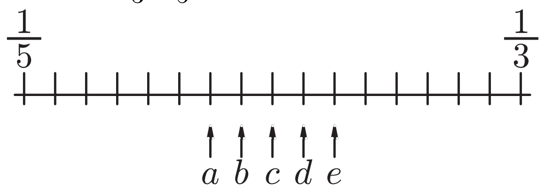
A) 0 B) 1 C) 2 D) Més de 2 E) És impossible determinar-ho

24. (*Regne Unit*) En un cub gros es fan tres talls per a formar vuit prismes més petits. Quina relació hi ha entre l'àrea *total* d'aquests vuit prismes petits i l'àrea del cub original?



A) 1 : 1 B) 2 : 1 C) 3 : 2 D) 4 : 3 E) 4 : 1

25. (*Holanda*) Les fraccions $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$ estan situades en la recta numèrica:



Quin punt correspon a la fracció $\frac{1}{4}$?

A) a B) b C) c D) d E) e

26. (*Catalunya*) Un quadrat s'ha disseccionat en 2009 quadrats que tenen la mida del costat entera. Quina és la mida més curta possible del costat del quadrat original?

A) 44
B) 45
C) 46
D) 503
E) No és possible disseccionar un quadrat en 2009 quadrats de costat enter.

27. (*Ucraïna*) En el quadrilàter $PQRS$, $PQ = 2006$, $QR = 2008$, $RS = 2007$ i $SP = 2009$. Quins dels angles interiors del quadrilàter han de ser necessàriament menors de 180°?

A) P, Q, R B) P, R, S C) P, Q, S D) Q, R, S E) P, Q, R, S

28. (*Estònia*) Si superposo un quadrat de 6 cm $\times$ 6 cm sobre un triangle, puc recobrir fins a un 60 % del triangle. Si superposo el triangle sobre el quadrat, puc recobrir fins a $\frac{2}{3}$ del quadrat. Quina és l'àrea del triangle?

A) $22\frac{4}{5}$ cm^2 B) 24 cm^2 C) 36 cm^2 D) 40 cm^2 E) 60 cm^2

---

29. (*Lituània*) En Divendres (el company de Robinson Crusoe) va escriure, un al costat de l'altre, uns quants nombres enters positius diferents, tots ells més petits que 11. Robinson Crusoe se'ls va mirar i es va adonar amb satisfacció que en cada parella de nombres veïns un d'ells era divisible per l'altre. Com a màxim, quants nombres havia escrit en Divendres?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

---

30. (*Rússia*) En un triangle ABC, l'angle B és igual a 20° i l'angle C és igual a 40°. La longitud de la bisectriu de l'angle A és 2. Quant val $BC - AB$?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

Premis i mencions

Primer premi

Adrià Balcázar Castell (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 130.0 punts

Premis per al pòdium

Gerard Feliu Montesinos (La Salle, Girona), 127.5 punts
Rafael Borràs Pernas (IES Francesc Ribalta, Castelló de la Plana), 125.0 punts

Premis de categoria A

Alejandro Sánchez Guerrero (IES Angeleta Ferrer, Sant Cugat), 122.25 punts
Petar Hlad (Joan Pelegrí, Barcelona), 121.25 punts
Ferran Alet Puig (Aula Escola Europea, Barcelona), 120.75 punts
Teresa Franco Leyva (Aula Escola Europea, Barcelona), 120.0 punts

Premi de categoria B

Ferran Enfedaque Moreno (Sadako, Barcelona), 119.75 punts
Eduard Vázquez Espín (IES Montserrat Roig, Sant Andreu de la Barca)
i Marc Dalmasso Blanch (Claver, Lleida), 117.5 punts
Sergi Cebrián Gres (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 117.25 punts

Premis de categoria C

Alberto Montes Gómez (IES Sant Quirze del Vallès), 114.75 punts
Martí Ribalta Albuixech (IES Francesc Ribalta, Solsona), 112.5 punts
Stamen Miroslavov Minkov (IES Margarida Xirgu, L'Hospitalet de Llobregat)
i Guim Olivé Oller (IES Jaume Huguet, Valls), 111.25 punts
Óscar Lozano Pérez (Aula Escola Europea, Barcelona), 111.0 punts

Premis de categoria D

Rafael Alvaro Fuentes Llopis (Aula Escola Europea, Barcelona), 110.75 punts
Jorge Peña Queralta (IES L'Almadrava, Benidorm), 108.75 punts
David Gil Solsona (IES Bovalar, Castelló de la Plana) i
Javier Cristín Redondo (Sagrada Família-Horta, Barcelona), 108.5 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Carles Seara Mora (IES Ernest Lluch, Barcelona),
Hong Chen (IES Euclides, Pineda de Mar) i
Manel Baradad Jurjo (Claver, Lleida), 105.0 punts
Pilar Puig Cortada (Aula Escola Europea, Barcelona) i
Elvira Martínez Duró (Sagrat Cor, Amposta), 104.75 punts
Cèlia Garriga Bonnín (IES Joan Brudieu, La Seu d'Urgell) i
David Luna Pérez (Sant Miquel, Barcelona), 103.75 punts
Alejandro Serés Cabasés (IES Samuel Gili i Gaya, Lleida) i
Arnau Cameron Torra (Viaró, Sant Cugat del Vallès), 103.5 punts
Jordina Francès i de Mas (IES Eugeni Xammar, L'Ametlla del Vallès),
Jie Luan (IES Montsacopa, Olot) i
Marc Clupés Peró (Escola Pia de Mataró, Mataró), 103.0 punts
Pere Alcon Quer (Nuestra Señora de Montserrat, Olesa), 102.5 punts
Borja Sánchez Zarate (Viaró, Sant Cugat del Vallès),
Jesús Bach Marquès (IES Aubenç, Oliana) i
Jordi Vila Pérez (IES Alexandre Deulofeu, Figueres), 102.25 punts
Carles Albiol Alcalde (IES La Llauna, Badalona),
Cristina Sust Farriol (Sant Nicolau, Sabadell),
Dani Samaniego Vidal (IES Guillem Catà, Manresa) i
Adrián Martínez Sanz (Nuestra Señora del Rosario, Barcelona), 101.25 punts
Carlos Ortiz Valcárcel (IES Pere Boïl, Manises),
Roberto Mengual Mengual (IES Enric Valor, Pego),
Oscar Rodríguez Del Río (CEPA Oriol Martorell, Barcelona),
Carmen Santegoeds Op Den Camp (IES Mediterrània, El Masnou) i
Alvaro Soria Cabello (IES Vicent Sos Baynat, Castelló), 101.0 punts
Joana Fraxanet Morales (IES Francesc Ribalta, Solsona) i
Guillem Bosch Massot (Aula Escola Europea, Barcelona), 100.75 punts
Carles López Bustins (IES Josep Brugulat, Banyoles), 100.5 punts
Gerard Pujadas Domenech (Casals-Gràcia, Manlleu) i
Román Sánchez Alonso (IES Jaume Balmes, Barcelona), 100.0 punts
Òscar Comino Trinidad (IES Manuel Blancafort, La Garriga), 99.75 punts
David Forns Bundó (IES Arquitecte Manuel Raspall, Cardedeu),
Víctor Gómez Martínez (IES Damià Campeny, Mataró) i
Gerard Erruz López (IES La Sedeta, Barcelona), 99.5 punts

Nil Garcia Moreno (Sagrada Família-Horta, Barcelona) i
Aniol Serra Juhé (IES Santa Eugènia, Girona), 98.75 punts
Daniel Carrillo Lampe (Viaró, Sant Cugat del Vallès),
Bernat Dolz Ripolles (IES Marius Torres, Lleida) i
Aina Feliu Cuberes (CEPA Oriol Martorell, Barcelona), 98.5 punts
Lluís Laguarda Sánchez (Escola Pia de Mataró, Mataró), 98.25 punts
Pablo Sonnaillon Colella (IES de Palamós, Palamós), 98.0 punts
Pablo Pires Núñez (IES Angeleta Ferrer i Sensat, Sant Cugat del Vallès)
i Pau Boix Capera (Thau, Barcelona), 97.5 punts
Albert Escofet Mata (Viaró, Sant Cugat del Vallès),
Feliu Saludes Piña (Escola Pia de Sabadell, Sabadell) i
Gerard Martí Juan (IES Narcís Oller, Valls), 97.25 punts

Qüestions de 3 punts. Solucions

1. D. 1800.

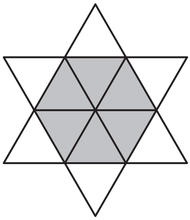
Els nombres donats són 2009, 11, 191, 1800, 209. És clar que l'únic que és parell és el quart.

2. C. 2.

Entre els quatre nois van ballar amb 8 noies. Entre les quatre noies han d'haver ballat, segons l'enunciat, amb 8 nois i, per tant, la quarta noia ha ballat amb 2 nois.

3. E. 18 cm.

El perímetre de l'estrella està format per 12 costats de triangle equilàter. El perímetre de l'hexàgon gris el formen 6 costats de triangle i, per tant, serà la meitat del de l'estrella.

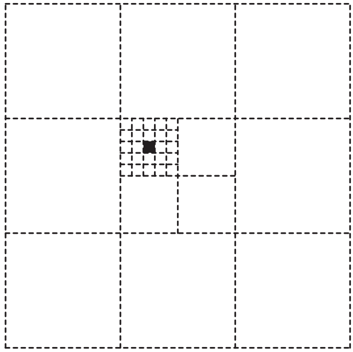


4. B. 20.

Com que $\dfrac{53-15}{2} = 19$ però hem de comptar també el nombre inicial són 20 els paquets que ha de repartir en Harry.

5. D. $\frac{1}{900}$.

La quadrícula petita està formada per 25 quadradets de la mida del negre. Per tant, com que en el quadrat central es podrien dibuixar 4 quadrícules com l'anterior, hi cabrien 100 quadradets. Com que en el quadrat sencer hi ha 9 quadrats com el central en total hi podria haver dibuixats 900 quadradets de la mida del quadradet negre.



6. D. 18.

Com que $100 = 2{\cdot}2{\cdot}5{\cdot}5$ podem raonar que l'única manera de descompondre'l com a producte de quatre factors diferents resulta considerant el possible factor 1 i agrupant un 2 amb un 5, $100 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10$. La suma d'aquests quatre factors és 18.

7. A. La meitat del nombre de gossos.

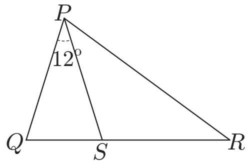
Com que cada gos té un nas, l'enunciat equival a dir que el nombre de potes dels gats és el doble que el nombre de gossos. És a dir el quàdruple del nombre de gats és igual al doble del nombre de gossos. I d'aquí es dedueix ràpidament la solució enunciada.

8. C. 5.

9 adults omplen tres quartes parts de l'ascensor. Per omplir la quarta part restant amb nins en podem posar $\frac{20}{4} = 5$.

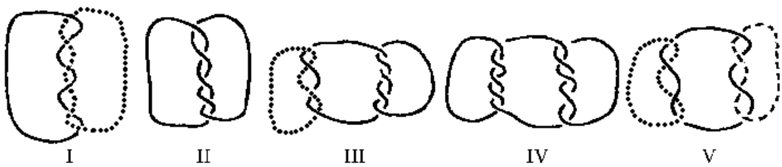
9. E. $54°$.

A partir de les dades de l'enunciat es dedueix que els triangles $\triangle PQS$ i $\triangle PSR$ són isòsceles. Per tant els angles en els vèrtexs Q i S del triangle $\triangle PQS$ mesuraran cada un $\dfrac{180° - 12°}{2} = 84°$. L'angle en S del $\triangle PSR$, com que és suplementari a un dels anteriors valdrà $180° - 84° = 96°$. Els altres dos angles del triangle isòsceles $\triangle PSR$ són igual i, doncs, $\widehat{SPR} = \dfrac{180° - 96°}{2} = 42°$ i, finalment, $\widehat{SPR} = \widehat{QPS} + \widehat{SPR} = 12° + 42° = 54°$.



10. A. I, III i V.

La figura mostra que en l'esquema I i en el III hi ha dos trossos de corda enllaçats i en el V, tres.



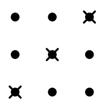
Qüestions de 4 punts. Solucions

11. B. 3.

Si mirem els nombres positius de l'1 al 10 observem que hi ha, només, l'1, el 2 i el 4. I no n'hi pot haver cap més perquè per als nombres $n, n \geq 10$, el fet de multiplicar n^2 per n segur que fa augmentar, si més no, una xifra.

12. C. 3.

Cal llevar-ne com a mínim tres, perquè a cada fila segur que cal treure'n 1. La figura adjunta mostra que podem llevar-ne tres sense que quedin tres punts alineats.



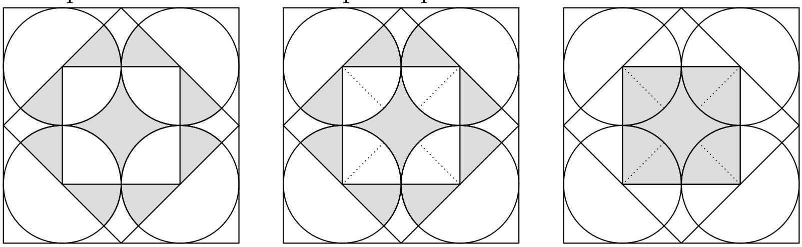
13. C. $45°$.

L'angle de $120°$ segur que és del triangle obtusangle i aleshores no ho pot ser el de $80°$. Com que ho és el de $80°$, l'angle de $10°$ no pot ser del triangle acutangle perquè esdevindria un triangle rectangle. Per tant l'angle de $55°$ sí que és del triangle acutangle. El tercer angle d'aquest triangle és de $180° - 80° - 55° = 45°$ i n'és l'angle més menut.

---

14. A. $\frac{1}{4}$.

Es pot veure que amb vuit sectors circulars de $45°$, iguals que els que estan acolorits exteriors al quadrat més menut, podem completar l'esmentat quadrat i així es veu que l'àrea acolorida és igual a la del quadrat central. Com que aquest quadrat té el costat igual a la meitat del quadrat gros es dedueix que la seva àrea n'és la quarta part.



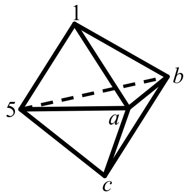
---

15. C. 13.

Si la primera persona de la cua digués la veritat totes les altres serien mentideres i aleshores, com que sabrien com és realment cadascú, totes les de la cua excepte la segona persona dirien que la del seu davant és veraç. Com que no diuen això deduim que la primera persona de la cua és mentidera.
Així doncs la segona persona de la cua és veraç.
Com que la tercera persona de la cua diu que la segona és mentidera, ella és mentidera. Amb la quarta persona passa com amb la segona; amb la cinquena com amb la tercera; etc.
Per tant les persones de la cua són alternativament mentidera, veraç, mentidera, ..., veraç i mentidera. En total hi ha 13 persones mentideres.

16. E. 17.

Els nombres de les cares superiors sumen $6+a$, $6+b$ i $1+a+b$. Si totes les cares han de sumar igual es dedueix en primer lloc que $a=b$ i tot seguit que $a=b=5$ i que la suma de cada cara superior és 11. Les cares inferiors sumen $10+c$ i, doncs, $c=1$. La suma dels cinc nombres és 17.



17. A. 1.

$T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E$ només pot tenir un valor, que és 0.
Efectivament, si s'ha de complir la igualtat

$$E \cdot I \cdot G \cdot H \cdot T = T \cdot W \cdot O \cdot F \cdot O \cdot U \cdot R$$

en la qual apareixen 10 lletres distintes, això significa que han de figurar-hi totes les xifres del 0 al 9. Com que la T apareix a tots dos costats es dedueix que $T=0$ perquè, altrament, un membre seria 0 i l'altre no ho podria ser. Per tant, si $T=0$ aleshores $T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E = 0$?

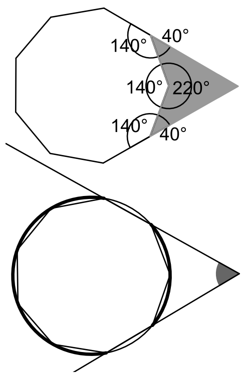
18. B. C **o** D.

A la casella just a la dreta de la B de la primera fila hi podrien anar, en principi, A o C però si es mira d'anar omplint caselles es veu que la C no hi pot anar. Si es van omplint caselles seguint les indicacions de l'enunciat es veu que a la primera fila hi ha d'anar necessàriament $ABABA$, a la segona $CDCDC$ i a la tercera $BABAB$. A la quarta fila hi pot anar $CDCDC$ o $DCDCD$.

A	B			
C	D			
		B		
B				

19. E. 60°.

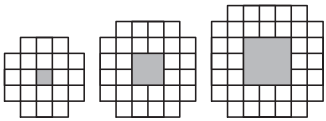
Els angles d'un eneàgon sumen $7 \cdot 180°$; cada angle d'un eneàgon regular és de $\dfrac{7 \cdot 180°}{9} = 140°$. Així podem deduir tres angles del quadrilàter acolorit, que són dos de 40° i un de 220°. Com que els angles d'un quadrilàter sumen 360° podem trobar la mesura de l'angle demanat.



També podem imaginar l'eneàgon regular inscrit en una circumferència i aleshores veiem que l'angle demanat és un angle exterior a la circumferència que abasta arcs de $2 \cdot 40°$ i $5 \cdot 40°$ i, per tant la seva mesura és $\dfrac{200° - 80°}{2} = 60°$.

20. D. 92.

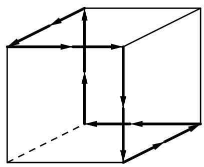
Si el quadrat gris és d'amplada n per envoltar-lo es necessiten $(n+4)^2 - 4 - n^2 = 4n+4+\cdot(n+2) = 8n+12$ quadrats unitaris blancs.
Per tant, per $n = 10$ se'n necessiten 92.



Qüestions de 5 punts. Solucions

21. C. 6.

La figura mostra l'itinerari que seguirem. És essencial la visió espacial de dreta/esquerra en el sentit de la marxa per l'exterior del cub.



22. E. 64.

Si el nombre comença per 1 o per 3 haurà d'anar seguit, alternativament, per un 2, un 1 o un 3, un 2 i així successivament. Cinc posicions fixes i cinc posicions amb dues possibilitats; això fa un total de $2^5 = 32$ nombres. Si imaginem que el nombre comença per 2 repetiríem l'explicació i trobaríem 32 nombres més. Així obtenim un total de 64 nombres.

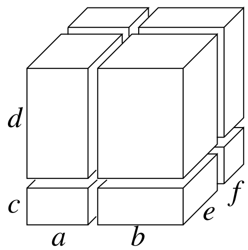
23. C. 2.

Si multipliquem el divisor més gran i el divisor més petit diferent de 1 d'un nombre (que és el divisor primer més petit) obtenim el nombre. En la situació de l'enunciat, si p és el divisor primer més petit del nombre, $45 \cdot p$ serà el divisor propi més gran i per tant el nombre que busquem serà $45 \cdot p^2$. Per aquest nombre p només podrà ser 2 o 3 perquè és múltiple de 3 i de 5. Així doncs els nombres que busquem són $45 \cdot 2^2 = 180$ i $45 \cdot 3^2 = 5 \cdot 3^4 = 405$.

---

24. B. 2 : 1.

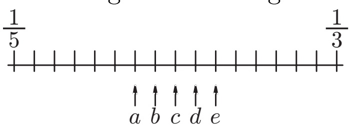
Podem observar que quan separem els vuit prismes de la dreta dels vuit de l'esquerra les noves cares que es generen componen per un costat una superfície igual a una cara del cub i per l'altre costat anàlogament. Semblantment succeeix quan separem els quatre prismes de dalt dels quatre de baix i també quan separem els quatre del davant dels quatre del darrere. En total, doncs, "neixen" cares que, entre totes, tenen una superfície igual a les 6 cares del cub. Per tant l'àrea total dels prismes petits serà el doble de l'àrea del cub.



Si a algú li agrada més calcular pot veure que, amb les lletres de la figura, l'àrea total del cub és $2(a+b)\cdot(e+f)+2(a+b)\cdot(c+d)+2(c+d)\cdot(e+f)$. Pel que fa als ortoedres petits, el que té dimensions $b,\ e,\ c$ té àrea $2b\cdot e+2b\cdot c+2c\cdot e$, el que correspon a $f,\ d,\ b$ té àrea $2f\cdot d+2f\cdot b+2d\cdot b$, i semblantment amb els altres sis prismes, d'arestes $c,\ a,\ e$ un, $b,\ f,\ c$ un altre, $b,\ d,\ e$ un altre, $f,\ d,\ c$ un altre, $a,\ d,\ e$ un altre i finalment $f,\ d,\ a$. Si sumem les àrees de tots els prismes veurem que resulta exactament el doble de l'àrea del cub.

25. A. a.

Cada una de les divisions del segment de la figura



correspon a $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{16}=\dfrac{1}{120}$. Per saber quantes divisions com aquesta hi ha des de $\dfrac{1}{5}$ fins a $\dfrac{1}{4}$ hem de dividir $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{120}}=6$. Si mirem la figura veiem que la 6a divisió correspon a la lletra a.

26. B. 45.

Com que $44^2 < 2009$ haurem de provar com a mínim amb un quadrat de costat 45. Si observem que $45^2 = 2025$ tenim que un quadrat de costat 45 unitats es pot descompondre en 2025 quadradets unitaris. Si en aquesta descomposició susbtituïm dos conjunts de 3×3 quadradets per dos quadrats de 3 unitats de costat cada un, hem reduït en 16 el total de quadrats de la descomposició que restarà formada per 2009 quadrats de costat enter.

27. B. P, R, S.

Si un angle α d'un quadrilàter és còncau es compleix que la suma de les longituds dels dos costats que formen aquest angle és més petita que la suma de les longituds dels altres dos costats del quadrilàter.
Vegem què succeeix en el quadrilàter de l'enunciat.
Vèrtex P o vèrtex R: La suma de longituds dels costats que hi conflueixen, que és 4015, és igual en cada cas a la suma de les longituds dels altres dos. Els angles en P i R no poden ser còncaus.
Vèrtex Q: Longitud dels que hi conflueixen $2008+2006=4014$ és més petita que la suma de les altres dues longituds. L'angle en Q pot ser còncau.
Vèrtex S: En aquest cas la suma de longituds dels costats que formen l'angle, $2007+2009=4016$ és més gran que la suma dels altres dos, $2008+2006=4014$. L'angle en S no pot ser còncau.

28. D. 40 $\mathbf{cm^2}$.

L'àrea del quadrat és de 36 cm^2. L'enunciat ens diu que el 60% de l'àrea del triangle és igual que els $\frac{2}{3}$ de l'àrea del quadrat, és a dir 24. El nombre que el seu 60% és igual a 24 és $\frac{24}{0,6} = 40$.

29. D. 9.

Podem enllaçar, per exemple, la llista dels nombres parells positius amb la dels múltiples de 3 positius mitjançant el 6 i també la dels múltiples de 2 amb la dels de 5 mitjançant l'1 i així obtenim una llista de 9 nombres positius: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 10, 5. Si poséssim el 7 a la llista només el podríem enllaçar amb l'1 i ens quedarien per col·locar o bé els múltiples de 5 o bé els de 3. Per tant, posaríem menys nombres.

30. E. 2.

D és el peu de la bisectriu de l'angle $\angle A$. A la primera figura es mostren valors d'angles que es poden deduir directament de l'enunciat i del fet que els angles d'un triangle sumen 180°.
A la segona figura s'ha dibuixat un punt A' amb la condició que $BA = BA'$. La distància que es demana és igual a CA'. Com que el triangle BAA' es isòsceles es dedueix que els angles a la base són de 80°. Aleshores podem veure que el triangle $AA'D$ també és isòsceles, que l'angle en A d'aquest triangle és de 20° i que $AA' = AD = 2$. Per diferència de dos angles ja coneguts deduïm que l'angle en A del triangle ACA' és de 40° i, per tant, aquest triangle també és isòsceles i serà $CA' = AA' = 2$.