# Cangur SCM 2009 Nivell 3

## Qüestions de 3 punts

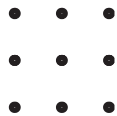
**1.** (*França*) Quin dels nombres següents és múltiple de 3?

A) 2009 B) $2+0+0+9$ C) $2^9$ D) $200-9$ E) $(2+0)\cdot(0+9)$

**2.** (*Rússia*) Per quants nombres enters positius necessitem la mateixa quantitat de xifres per a escriure el seu quadrat que per a escriure el seu cub?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 9 E) Una quantitat infinita

**3.** (*Bielorrússia*) Quin és el nombre mínim de punts que cal llevar de la figura de manera que no hi quedin tres punts alineats?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

**4.** (*Catalunya*) En una cursa popular han participat 2009 persones. El nombre de persones a les quals en Joan ha guanyat és justament el triple del nombre de participants que han arribat a la meta abans que en Joan. En quin lloc ha quedat classificat en Joan en aquesta cursa?

A) 503 B) 501 C) 500 D) 1503 E) 1507

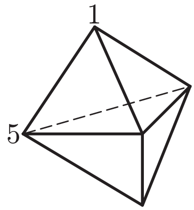
**5.** (*Xipre*) Quin és el valor de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{8}$ de $\frac{8}{9}$ de $\frac{9}{10}$ de 1000?

A) 250 B) 200 C) 150 D) 100 E) Un altre valor

**6.** (*Suècia*) S'ha compost una successió llarga de dígits escrivint el nombre 2009 repetidament 2009 vegades. La suma de les xifres senars de la successió que tenen immediatament darrere un dígit parell és igual a

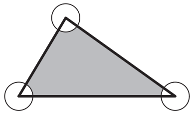
A) 2 B) 9 C) 4018 D) 18072 E) 18081

**7.** (*Mèxic*) La figura mostra un sòlid format per 6 cares triangulars. Hi ha un nombre a cada vèrtex. Per cada cara, consideram la suma dels tres nombres situats als vèrtexs de la cara. Si totes les sumes donen el mateix i dos dels nombres són 1 i 5 com es mostra a la figura, quina és la suma dels 5 nombres?




A) 9 B) 12 C) 14 D) 15 E) 17

**8.** (*Catalunya*) L'àrea del triangle del dibuix és 80 $m^2$ i el radi dels cercles centrats als vèrtexs és 2 m. Quant mesura, en $m^2$, l'àrea fosca?

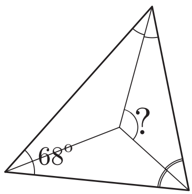


A) 76 B) $80 - 2\pi$ C) $40 - 4\pi$ D) $80 - \pi$ E) $78\pi$

**9.** (*Eslovènia*) En Joan ha escrit una successió de nombres, de manera que cada nombre (a partir del tercer de la seqüència) és la suma dels dos nombres anteriors a ell. El quart nombre de la successió és 6 i el sisè nombre de la successió és 15. Quin és el setè nombre de la successió?

A) 9 B) 16 C) 21 D) 22 E) 24

**10.** (*Holanda*) Un triangle té un angle de 68°. Al dibuix apareixen les tres bisectrius del triangle. Quants graus té l'angle amb el signe d'interrogació?




A) 124° B) 126° C) 128° D) 132° E) 136°

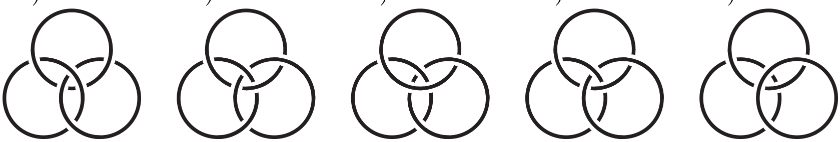
## Qüestions de 4 punts

**11.** (*França*) En cada control acadèmic que fa la Maria la puntuació pot ser 0, 1, 2, 3, 4 o 5 punts. Sabent que després d'haver realitzat 4 controls, la Maria té una mitjana de 4 punts, quina de les afirmacions següents no pot ser certa de cap de les maneres?

A) La Maria ha tret un 4 en tots els controls
B) La Maria ha tret un 3 precisament dues vegades
C) La Maria ha tret un 4 precisament dues vegades
D) La Maria ha tret un 1 justament una sola vegada
E) La Maria ha tret un 3 precisament tres vegades

**12.** (*França*) Els anells borromeans tenen la sorprenent propietat que no es poden separar sense trencar-ne cap però aleshores, quan ja se n'ha separat un, sigui quin sigui, els altres dos ja no queden enllaçats. Quina de les figures següents mostra uns anells borromeans?

A) B) C) D) E)



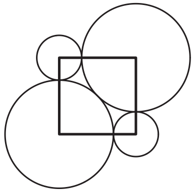
**13.** (*Ucraïna*) En una illa remota unes quantes persones sempre diuen la veritat i les altres persones menteixen sempre. 25 persones d'aquesta illa estan col·locades en fila índia. La primera persona de la cua diu que totes les altres són mentideres. Totes les altres persones de la cua diuen que la persona que tenen al davant és mentidera. Quantes persones mentideres hi ha a la cua?

A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) És impossible saber-ho

**14.** (*Ucraïna*) Si definim $a \spadesuit b = ab + a + b$ i sabem que $3 \spadesuit 5 = 2 \spadesuit x$, quin és el valor de $x$?

A) 3 B) 6 C) 7 D) 10 E) 12

**15.** (*Holanda*) Hem dibuixat quatre cercles amb centres en els vèrtexs d'un quadrat; n'hi ha dos d'iguals més grossos i dos, també iguals entre ells, més menuts. Els cercles grossos són tangents entre ells i tangents a cada un dels cercles menuts. Quin és el resultat de dividir el radi dels cercles grossos pel radi dels cercles menuts?



A) $\dfrac{2}{9}$ B) $\sqrt{5}$ C) $0{,}8\pi$ D) 2,5 E) $1+\sqrt{2}$

---

**16.** (*Hongria*) Quants nombres enters positius $n$ compleixen que el valor absolut de la diferència entre $\sqrt{n}$ i 10 és més petit que 1?

A) 38 B) 40 C) 19 D) 39 E) 41

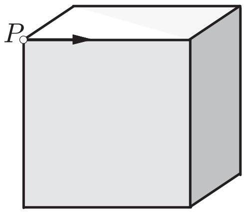
---

**17.** (*Lituània*) En Divendres (el company de Robinson Crusoe) va escriure, l'un al costat de l'altre, uns quants nombres enters positius diferents, tots ells més petits que 11. Robinson Crusoe se'ls va mirar i es va adonar amb satisfacció que en cada parella de nombres veïns un d'ells era divisible per l'altre. Com a màxim, quants nombres havia escrit en Divendres?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

---

**18.** (*Holanda*) Començant des del punt $P$, ens movem al llarg de les arestes per l'exterior del cub, seguint la direcció i el sentit que assenyala la fletxa. Al final de l'aresta hem de triar entre anar cap a l'esquerra o cap a la dreta. A la fi de la segona aresta hem de triar de nou, i així successivament. Elegim alternativament dreta i esquerra. Quantes arestes hem de recórrer per tornar al punt $P$ per primera vegada?




A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

---

**19.** (*Ucraïna*) Quants nombres hi ha de deu xifres que s'escriguin fent servir només algunes de les xifres 1, 2 i 3 o totes tres, en els quals dues xifres contigües qualssevol difereixin d'1?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

---

**20.** (*Ucraïna*) Quants nombres enters positius $N$ compleixen la propietat que en el conjunt dels seus divisors positius diferents de $N$ i d'1, el nombre més gran d'aquest conjunt és igual a 45 vegades el nombre més petit del conjunt?

A) Cap B) 1 C) 2 D) Més de 2 E) No es pot determinar

## Qüestions de 5 punts

**21.** (*Catalunya*) Col·loquem els enters de l'1 al 20 en la llista que teniu a continuació, de manera que la suma de dos qualssevol que estiguin junts ha de ser un nombre primer. Com podeu veure, alguns nombres han estat substituïts per lletres. A quin nombre correspon la lletra $e$?

$$20,\ a,\ 16,\ 15,\ 4,\ b,\ 12,\ c,\ 10,\ 7,\ 6,\ d,\ 2,\ 17,\ 14,\ 9,\ 8,\ 5,\ 18,\ e$$

A) 1 B) 3 C) 11 D) 13 E) 19

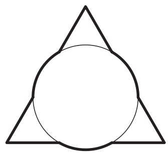
**22.** (*Rússia*) Quants zeros s'haurien d'escriure en comptes del signe $\star$ en el nombre decimal $1{,}\star 1$ per tal d'obtenir un nombre que sigui més petit que $\dfrac{2009}{2008}$ però més gran que $\dfrac{20009}{20008}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**23.** (*Catalunya*) El petit Cangur té 2009 cubs de $1 \times 1 \times 1$ que ha col·locat formant un ortoedre. A més, té 2009 etiquetes $1 \times 1$ que ha d'emprar per a acolorir la superfície externa de l'ortoedre. El petit Cangur ho ha aconseguit, i li han sobrat etiquetes. Quantes etiquetes li han sobrat?

A) 763 B) 476 C) 49 D) 39 E) Més de 1000

**24.** (*Catalunya*) Un triangle equilàter de costat 3 i un cercle de radi 1 se superposen, de manera que els centres de les dues figures coincideixen. Quant mesura el perímetre de la figura que s'obté així?



A) $3 + 2\pi$ B) $6 + \pi$ C) $9 + \dfrac{\pi}{3}$ D) $3\pi$ E) $9 + \pi$

**25.** (*Ucraïna*) Es col·loquen unes quantes taronges, melicotons, pomes i kiwis en fila, de manera que en algun lloc de la fila cada tipus de fruita es pot trobar al costat de cada un dels altres tipus de fruita diferents. Quin és el mínim nombre de fruites de la fila?

A) 8 B) 11 C) 4 D) 5 E) Aquesta situació és impossible

---

**26.** (*Hongria*) Quin és el primer enter $n$, per al qual el producte $(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\cdots(n^2-1)$ és un quadrat perfecte?

A) 6 B) 8 C) 16 D) 27 E) Una altra resposta

---

**27.** (*Polònia*) Si $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ i $c = 3^{11}$, aleshores

A) $a < b < c$ B) $b < a < c$ C) $b < c < a$ D) $c < a < b$ E) $c < b < a$

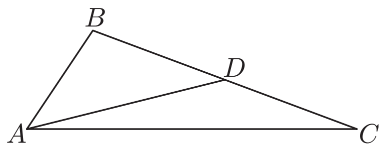
---

**28.** (*Hongria*) En un terreny hi ha marcats uns eixos de coordenades que van, l'un d'est a oest i, l'altre, de nord a sud. El Cangur està situat a l'origen de coordenades. Pot saltar una unitat cap a l'est, o cap a l'oest, o cap al nord o cap al sud. A quants punts diferents del terreny pot arribar el Cangur si fa 10 salts successius en aquestes condicions?

A) 121 B) 100 C) 11 D) 400 E) 441

---

**29.** (*Polònia*) En el triangle $ABC$, el segment $AD$ n'és una mitjana. L'angle $\widehat{ACB}$ és de 30° i l'angle $\widehat{ADB}$ és de 45°. Quina és la mesura de l'angle $\widehat{BAD}$?




A) 45° B) 30° C) 25° D) 20° E) 15°

---

**30.** (*Catalunya*) Diem que un nombre primer és *peculiar* si és un nombre primer d'una sola xifra o bé si és un nombre primer de més xifres, però aleshores el nombre que s'obté suprimint-ne la primera xifra també és un nombre primer peculiar i el mateix succeeix amb el nombre que s'obté suprimint-ne l'última xifra. Quants nombres enters positius hi ha que siguin primers peculiars?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

## Premis i mencions

**Primer premi**

Xavier Fernández-Real Girona (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 136.25 punts

**Premis per al pòdium**

David Magraner Villalba (IES Aamussafes, Almussafes), 128.25 punts
Gerard Neras Lozano (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 122.5 punts

**Premis de categoria A**

Juan Vicente Folch Celades (IES Alfonso XIII, Vall d'Alba), 119.75 punts
Luis Alberto Moruno Calderon (IES Jaume Callís, Vic), 118.75 punts
Adrià González Esteve (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 118.5 punts

**Premi de categoria B**

Pol Naranjo Barnet (IES Damià Campeny, Mataró), 116.25 punts
Alex Peman García (Aula Escola Europea, Barcelona), 116.0 punts
Guillem Alsina Oriol (IES Jaume Callís, Vic)
i Ramon Zuloaga Geli (IES Cap Norfeu, Roses), 113.75 punts

**Premis de categoria C**

Pere Planell Morell (Aula Escola Europea, Barcelona), 112.75 punts
Salvi Solà Martinell (IES Secretari Coloma, Barcelona), 111.25 punts
Rafael Murcia Hernández Herrera (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona), 108.75 punts
Elisa Castañer Enseñat (Sant Pau, Barcelona), 107.5 punts

**Premis de categoria D**

Ivan Campà Sabater (IES Montserrat Roig, Terrassa), 106.75 punts
Judit Anton Francesch (Sagrat Cor de Jesús, Tarragona) i
Guillermo Girona San Miguel (IES Príncep de Viana, Barcelona), 105.75 punts
Bru Martinell Chicano (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 105.0 punts

**Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions**

Pablo Pastor Riquelme (IES Marius Torres, Lleida), 104.5 punts
Pau Amich Vidal (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 103.75 punts
Marcel Llavero Pesquina (IES Narcís Xifra i Masmitjà, Girona) i
Mauricio Alva Hower (Sant Josep Obrer, L'Hospitalet), 103.5 punts
Joan Miret Minard (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona), 102.75 punts
Bernat Padullés Castelló (IES Ernest Lluch, Barcelona), 102.5 punts
Clara Pérez Ràfols (Madres Concepcionistas, Barcelona), 102.25 punts
Agustín Bou Catalá (IES Vila-Roja, Almassora), 102.0 punts
Daniel De Córdoba Gil (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona), 101.25 punts
Andrés Burgos Caminal (Joan Pelegrí, Barcelona), 101.0 punts
Anna Llopis Montserrat (Proa, Barcelona), 100.5 punts
Inés Ruíz Gemar (IES Pere Calders, Cerdanyola del Vallès), 100.0 punts
Bernat Martínez Bort (IES Alfonso XIII, Vall d'Alba), 99.25 punts
Alejandro Segarra Tamarit (IES Violant de Casalduch, Benicàssim)
Edgar Badia Guardiola (Infant Jesús, Barcelona) i
Eduard Ribas Fernández (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona), 99.0 punts
Clara Hormigos Feliu (Escola Pia de Nostra Senyora, Barcelona), 98.25 punts
Olga Claramonte Bellmunt (IES Vila-Roja, Almassora) i
David Amorín García (IES Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 98.0 punts
Samira Martínez Otelo (IES Pius Font i Quer, Manresa), 97.75 punts
David Codony Gisbert (Bienaventurada Virgen María, Barcelona) i
David Medel Pizarro (Joan Pelegrí, Barcelona), 97.25 punts
Georgina Ansaldo Giné (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 97.0 punts
Bernardo Pérez Aznar (IES Antoni Martí i Franquès, Tarragona), 96.75 punts
Berta Bosch Vidal (IES Montserrat, Barcelona) i
Andreu Ferré Moragues (IES Antoni Martí i Franquès, Tarragona), 96.25 punts

## Qüestions de 3 punts. Solucions

**1. E.** $(2+0)\cdot(0+9)$.

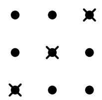
Els valors proposats són 2009, 11, 512, 191 i $(2+0)\cdot(0+9) = 18$. L'últim és l'únic que és múltiple de 3. Si escau per al 2009 es pot recordar el criteri de divisibilitat per 3 i per al $2^9 = 512$ es pot dir que si multipliquem només uns quants 2 mai podem assolir un múltiple de 3.

**2. B. 3.**

Si mirem els nombres positius de l'1 al 10 observem que hi ha, només, l'1, el 2 i el 4. I no n'hi pot haver cap més perquè per als nombres $n, n \geq 10$, el fet de multiplicar $n^2$ per $n$ segur que fa augmentar, si més no, una xifra.

**3. C. 3.**

Cal llevar-ne com a mínim tres, perquè a cada fila segur que cal suprimir-ne un. La figura adjunta mostra que podem llevar-ne tres sense que quedin tres punts alineats.



**4. A. 503.**

Si les 2008 persones que no són en Joan es divideixen en quatre parts, una d'aquestes parts, que tindrà $\dfrac{2008}{4} = 502$ persones, correspon a aquelles que han arribat abans que en Joan. Per tant en Joan és el 503è.

És clar que aquest raonament es pot traduir molt bé a una equació. Si $x$ representa el nombre de persones que han avançat a en Joan es compleix $x + 1 + 3x = 2009$. D'aquí es dedueix de seguida que $x = 502$ i, doncs, en Joan és el 503è.

**5. D. 100.**

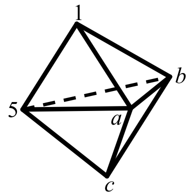
És $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot 1000$, expressió que, simplificada adequadament, es veu de seguida que és $\dfrac{1000}{10} = 100$.

**6. D. 18072**.

Les xifres senars que tenen al darrere una xifra parell són tots els 9 que apareixen excepte l'últim. La suma demanada és doncs $9 \cdot 2008 = 18072$

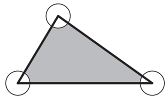
**7. E. 17**.

Els nombres de les cares superiors sumen $6 + a$, $6 + b$ i $1 + a + b$. Si totes les cares han de sumar igual es dedueix en primer lloc que $a = b$ i tot seguit que $a = b = 5$ i que la suma de cada cara superior és 11. Les cares inferiors sumen $10 + c$ i, doncs, $c = 1$. La suma dels cinc nombres és 17.




**8. B.** $80 - 2\pi$.

Com que els tres angles del triangle sumen 180°, aleshores els tres sectors circulars blancs interiors al triangle podem compondre un semicercle en un cercle de radi 2. L'àrea d'aquest semicercle és $2\pi$, que cal restar a l'àrea del triangle per obtenir l'àrea demanada.



**9. E. 24**.

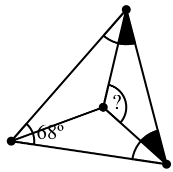
El cinquè nombre de la successió serà un 9 perquè $6+9 = 15$. El setè nombre de la successió és la suma del cinquè i el. sisè, $15 + 9 = 24$.

**10. A.** 124°.

Els dos angles no coneguts del triangle sumen

$$180° - 68° = 112°.$$

La meitat d'aquests angles, que es poden veure ombrejats a la figura, sumaran doncs $\dfrac{112°}{2} = 56°$. L'angle indicant amb el signe **?** juntament amb aquests dos han de sumar 180° perquè són els tres angles d'un triangle i, per tant, la mesura de **?** és $180° - 56° = 124°$.



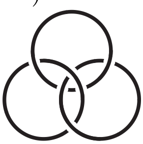
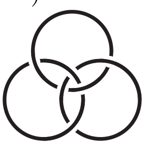
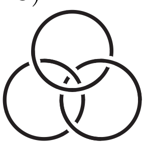
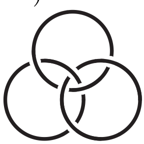
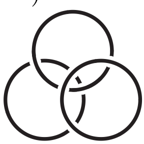
## Qüestions de 4 punts

**11. E**.

És clar que és possible que na Maria hagi tret un 4 en tots els controls.
També pot haver tret un 3 precisament dues vegades, $3+3+5+5$, i també un 4 precisament dues vegades, $4+4+3+5$.
Si na Maria ha tret un 1 justament una sola vegada li falten 15 punts en els altres tres controls per tenir mitjana 4, que equival a 16 punts en total. Pot ser: $1+5+5+5$.
No pot ser que hagi tret un 3 precisament tres vegades perquè així sumaria 9 punts i n'hi faltarien 7 en el quart control, però la nota màxima és un 5.

**12. B**.

S'ha d'analitzar cas per cas i seguidament es comenta breument. Indicarem els anells com "el superior", "el de l'esquerra" i "el de la dreta".
En els casos A), C) i D) es pot veure que si trenquem l'anell superior, el de la dreta i el de l'esquerra encara queden enllaçats i per tant no es tracta d'anells borromeans. Si s'examina amb atenció la figura E) es veu que en realitat mostra tres anells no enllaçats.
La figura B) sí que representa tres anells borromeans. Vegeu que si trenquem l'anell superior i el separem queda el de l'esquerra tot ell per davant del de la dreta; si trenquem el de l'esquerra queda l'anell de la dreta per davant del superior; si trenquem el de la dreta queda el superior per davant del de l'esquerra.

A)

B)

C)

D)

E)


**13. C. 13**.

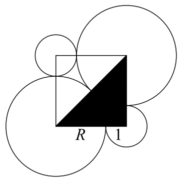
Si la primera persona de la cua digués la veritat totes les altres serien mentideres i aleshores, com que sabrien com és realment cadascú, totes les de la cua excepte la segona persona dirien que la del seu davant és veraç. Com que no diuen això deduim que la primera persona de la cua és mentidera.
Així doncs la segona persona de la cua és veraç.
Com que la tercera persona de la cua diu que la segona és mentidera, ella és mentidera. Amb la quarta persona passa com amb la segona; amb la cinquena com amb la tercera; etc.
Per tant les persones de la cua són alternativament mentidera, veraç, mentidera, ..., veraç i mentidera. En total hi ha 13 persones mentideres.

**14. C. 7**.

Si apliquem la definició veiem que $3 \spadesuit 5 = 23$ i que $2 \spadesuit x = 3x + 2$. Si ha de ser $3x + 2 = 23$ es dedueix de seguida que $x = 7$.

**15. E.** $1 + \sqrt{2}$.

Sense perdre generalitat podem suposar que el radi dels cercles menuts és 1 i aleshores la resposta del problema plantejat serà el radi $R$ dels cercles grossos.
Si observem el triangle ombrejat a la figura veiem que és un triangle rectangle isòsceles que té com a mesura dels catets $1 + R$ i la hipotenusa és $2R$. El teorema de Pitàgores ens diu que ha de ser $2 \cdot (1 + R)^2 = (2R)^2$. Si resolem aquesta equació trobem una solució negativa, que no és vàlida per al problema, i l'altra, simplificada, és $1 + \sqrt{2}$.




**16. D. 39**.

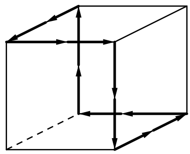
La condició de l'enunciat $|\sqrt{n} - 10| < 1$ equival a $-1 < \sqrt{n} - 10 < 1$ i si ara sumem 10 a cada terme, també equival a $9 < \sqrt{n} < 11$. Com que es tracta de nombres positius podem elevar les inequacions al quadrat i n'obtenim unes altres equivalents: $81 < n < 121$. Per tant els nombres que compleixen l'enunciat són els del conjunt $\{82, 83, ..., 119, 120\}$, és a dir un total de 39 nombres.

**17. D. 9**.

Podem enllaçar, per exemple, la llista dels nombres parells positius amb la dels múltiples de 3 positius mitjançant el 6 i també la dels múltiples de 2 amb la dels de 5 mitjançant l'1 i així obtenim una llista de 9 nombres positius: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 10, 5. Si poséssim el 7 a la llista només el podríem enllaçar amb l'1 i ens quedarien per col·locar o bé els múltiples de 5 o bé els de 3. Per tant, posaríem menys nombres.

**18. C. 6**.

La figura mostra l'itinerari que seguirem. És essencial la visió espacial de dreta/esquerra, tenint en compte en cada moment el sentit de la marxa per l'exterior del cub.



**19. E. 64**.

Si el nombre comença per 1 o per 3 haurà d'anar seguit, alternativament, per un 2, un 1 o un 3, un 2 i així successivament. Cinc posicions fixes i cinc posicions amb dues possibilitats; això fa un total de $2^5 = 32$ nombres. Si imaginem que el nombre comença per 2 repetiríem l'explicació i trobaríem 32 nombres més. Així obtenim un total de 64 nombres.

**20. C. 2**.

Si multipliquem el divisor més gran i el divisor més petit diferent de 1 d'un nombre (que és el divisor primer més petit) obtenim el nombre. Per tant el nombre que busquem serà $45 \cdot p^2$ on $p$ és el divisor primer més petit del nombre. $p$ només podrà ser 2 o 3 perquè el nombre és múltiple de 3 i de 5. Així doncs els nombres que busquem són $45 \cdot 2^2 = 180$ i $45 \cdot 3^2 = 5 \cdot 3^3 = 405$.

## Qüestions de 5 punts

**21. D. 13**.

A la llista falten els nombres 1, 3, 11, 13 i 19. Aleshores podem observar que $a$ només pot ser el 3; $b$ i $c$ només poden ser, tots dos, l'1 i el 19, que per tant hauran d'ocupar (indistintament) aquests dos llocs. Després veiem que, de l'11 i el 13 que són els que queden per col·locar $d$ només pot ser l'11. Conclusió: $e$ ha de ser el 13.

**22. C. 3**.

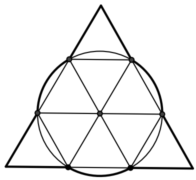
Escriurem $N$=1,$\star$1. Si l'asterisc equival a $n$ zeros és que $N = 1 + 10^{-(n+1)}$. Si s'ha de complir $\dfrac{20009}{20008} < N < \dfrac{2009}{2008}$, restant 1 a les desigualtats anteriors obtenim $\dfrac{1}{20008} < 10^{-(n+1)} < \dfrac{1}{2008}$ i ara, invertint les fraccions, $20008 > 10^{n+1} > 2008$. Veiem, doncs, que ha de ser $n + 1 = 4$ i, per tant, $n = 3$. Igualment ho podríem raonar imaginant que fem a mà la divisió de 2009 per 2008, que dóna un resultat $A >$ 1,0001. Semblantment 20009 dividit per 20008 dóna $B =$ 1,0000.... $<$ 1,0001 i així s'arriba a la mateixa conclusió.

**23. A. 763**.

Com que $2009 = 7^2 \cdot 41$, els ortoedres que pot haver format el Cangur tindran per dimensions $2009\times1\times1$ o bé $287\times7\times1$ o bé $41\times7\times7$. La superfície dels dos primers supera les 2009 unitats quadrades i, per tant, per aquests ortoedres faltarien etiquetes. La superfície de l'ortoedre de dimensions $41 \times 7 \times 7$ és $2 \cdot 7 \cdot 7 + 4 \cdot 41 \cdot 7 = 1246$ i per tant sobren $2009 - 1246 = 763$ etiquetes.

**24. B.** $6 + \pi$.

Si fem una rotació d'angle 60° amb centre de rotació el centre comú del triangle i del cercle la figura es transformarà en ella mateixa. Per aquesta raó els punts assenyalats sobre el perímetre de la figura es transformen cada un en el següent i els triangles auxiliars que s'han dibuixat són tots ells equilàters de costat 1. El perímetre de la figura està format per sis segments de longitud 1 i una longitud igual a un semicercle de radi 1, és a dir $\pi$.



**25. A. 8**.

Si col·loquem 8 fruites així TMPKTPMK es compleix la condició de l'enunciat i cada tipus de fruita es pot trobar al costat de qualsevol dels altres tipus. Així ja podem decidir l'opció de resposta perquè és clar que amb 4 no podem aconseguir que cada tipus estigui al costat de qualsevol altre i amb 5, tampoc, perquè hi ha d'haver posades les quatre fruites, per exemple TMPK, i aleshores sigui el que sigui el tipus de fruita X que afegim, cap de les situacions XTMPK, TXMPK, TMXPK, TMPXK o TMPKX no compleix la condició.

**26. B. 8**.

Si escrivim cada parèntesi com suma per diferència trobarem

$$(2+1)\cdot(2-1)\cdot(3+1)\cdot(3-1)\cdot(4+1)\cdot(4-1)\cdot(5+1)\cdot(5-1)\dots$$

$2-1=1$ és un quadrat perfecte. Per altra banda cada factor $(k+1)$ és igual al factor $((k+2)-1)$ i quan es multipliquen donen un quadrat perfecte. Aleshores el nombre $n$ que es demana serà el primer amb què poguem trobar factors encara no emparellats que multiplicats donin un quadrat perfecte. Ho aconseguim per $n=8$ que ens deixa sense emparellar els factors $(3-1),(7+1)$ i $(8+1)$.

---

**27. E.** $c<b<a$.

Observem que $c=3^{11}<4^{11}=2^{22}<b=8^8=(2^3)^8=2^{24}<a=2^{25}$.

---

**28. A. 121**.

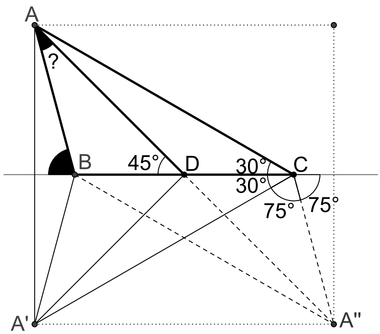
Si indiquem amb $n,s,e,o$ el nombre de vegades que el Cangur ha saltat respectivament cap al nord, cap al sud, cap a l'est o cap a l'oest haurà arribat al punt de coordenades $(e-o,n-s)$ on $e+o+n+s=10$. Podem escriure la suma de les coordenades d'aquest punt com $e-o+n-s=10-2(o+s)$ i deduïm que serà un nombre parell comprès entre $-10$ i 10, aquests dos valors inclosos i tots els intermedis factibles. Semblantment podríem raonar per a la diferència de les coordenades.

Per tant el Cangur pot arribar a qualsevol dels 121 punts d'intersecció de les rectes $x+y=j$ amb les rectes $y-x=k$ amb $j,k$ en el conjunt

$$\{-10,-8,-6,...,0,...,6,8,10\}.$$

**29. B.** 30°.

Si fem una simetria del punt $A$ respecte el costat $BC$ trobem el punt $A'$. Si mirem l'angle de 45° veiem que queda dibuixat un triangle rectangle isòsceles $ADA'$ i, si mirem l'angle de 30 observarem un triangle equilàter $ACA'$. Aleshores, si fem una simetria central del punt $A$ respecte el punt $D$ es forma un paral·lelogram $ABA"C$ de manera que $AA'A"$ són tres vèrtexs consecutius d'un quadrat. $A'A"C$ és un triangle isòsceles on l'angle en $A'$ és de 30° (el que falta a l'angle del triangle equilàter per tenir un angle recte) i deduïm la mesura de 75° de l'angle en $C$ d'aquest triangle i, comptant el que falta per a arribar a un angle pla, de l'altre angle de 75° que li és adjacent. Aquest angle és igual que l'angle acolorit a la figura exterior al triangle $ABD$, que és la suma dels dos angles del triangle $ABD$ que no li són adjacents. Així deduïm que l'angle demanat és de 30°.




**30. D. 9**.

Els nombres primers peculiars d'una xifra són 2, 3, 5 i 7. Els de dues xifres hauran de ser nombres primers que tinguin com a primera i com a segona xifra una de les anteriors. Si els escrivim i ho comprovem veurem que només són 23, 37, 53 i 73. Els candidats a primers peculiars de tres xifres es construiran fent que les dues primeres xifres siguin un dels nombres anteriors i les dues últimes també. A priori podem pensar en 237, 373, 537 i 737. D'aquests només és primer 373.

## Qüestions de 3 punts

**1.** (*Eslovàquia*) Hi ha 200 peixos en un aquari. L'1 % és de color blau i la resta és de color groc. Quants peixos de color groc hem de treure de l'aquari perquè el 2 % dels peixos que queden siguin de color blau?

A) 2 B) 4 C) 20 D) 50 E) 100

**2.** (*Regne Unit*) Quin és el nombre més gran?

A) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ E) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

**3.** (*Regne Unit*) Quants enters positius diferents $n$ hi ha que compleixin que el nombre $n^2+n$ sigui un nombre primer?

A) 0
B) 1
C) 2
D) N'hi ha un nombre finit però més gran que 2
E) N'hi ha un nombre infinit

**4.** (*Finlàndia*) Na Mari, en Ville i l'Ossi varen anar a un cafè. Cadascun d'ells va prendre tres tassons de suc, dos gelats i cinc croissants. Quina de les quantitats següents van pagar?

A) 39,20 € B) 38,20 € C) 37,20 € D) 36,20 € E) 35,20 €

**5.** (*Ucraïna*) En una illa remota unes quantes persones sempre diuen la veritat i les altres persones menteixen sempre. 25 persones d'aquesta illa estan col·locades en fila índia. La primera persona de la cua diu que totes les altres són mentideres. Totes les altres persones de la cua diuen que la persona que tenen al davant és mentidera. Quantes persones mentideres hi ha a la cua?

A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) És impossible saber-ho

**6.** (*Eslovàquia*) Les circumferències $f$, de centre $F$ i radi 13, i $g$, de centre $G$ i radi 15, s'intersequen en els punts $P$ i $Q$. La llargària del segment $PQ$ és 24. Quina de les següents és la llargària del segment $FG$?

A) 2 B) 5 C) 9 D) 14 E) 18

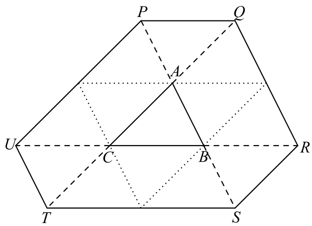
**7.** (*Finlàndia*) Una caixa conté 2 mitjons blancs, 3 de rojos i 4 de blaus. La Isabel sap que un terç dels mitjons tenen un forat, però no sap de quin color són els mitjons foradats. Pren mitjons de la caixa a l'atzar amb l'esperança de prendre dos mitjons bons del mateix color. Quants mitjons ha de prendre per a estar absolutament segura de trobar un parell bo?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

**8.** (*Catalunya*) Set persones s'han de desplaçar a un poble veí. Poden fer servir un cotxe de cinc places i una moto de dues places. De quantes maneres diferents poden distribuir-se en els dos vehicles, tot suposant que tots saben conduir? (No es té en consideració el seient exacte que cada persona ocupa al cotxe o bé a la moto.)

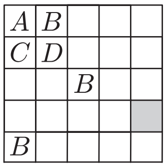
A) 21 B) 42 C) 120 D) 441 E) 5040

**9.** (*Mèxic*) Els costats del triangle $ABC$ es prolonguen pels dos costats fins a arribar als punts $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ i $U$, de manera que $|PA| = |AB| = |BS|$, $|TC| = |CA| = |AQ|$ i $|UC| = |CB| = |BR|$. Si l'àrea del triangle $ABC$ és 1, quina és l'àrea de l'hexàgon $PQRSTU$?




A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) No hi ha informació suficient

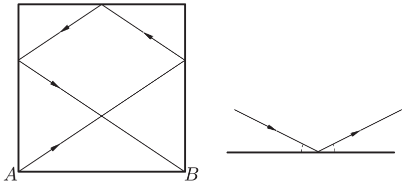
**10.** (*Mèxic*) Volem pintar els quadrats de la taula utilitzant els colors $A$, $B$, $C$ i $D$, de tal manera que els quadrats veïns no tinguin el mateix color (quadrats que comparteixen un vèrtex es consideren veïns). Alguns dels quadrats ja han estat pintats amb els colors com es mostra. Quins són els possibles colors per al quadrat gris?




A) $A$ o $B$ B) Només $C$ C) Només $D$ D) $A$, $B$, $C$ o $D$ E) $C$ o $D$

## Qüestions de 4 punts

**11.** (*Mèxic*) En un billar de forma quadrada de 2 metres de costat es tira una bola des de la cantonada $A$. Després de tocar tres costats, tal com indica la figura, acaba a la cantonada $B$. Quants metres recorre la bola? (Recorda que una bola rebota formant el mateix angle en sortir que en entrar, com es mostra a la figura de la dreta.)

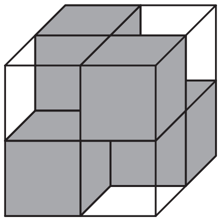



A) $2\sqrt{13}$  B) $4\sqrt{3}$  C) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$  D) 7  E) 8

**12.** (*Ucraïna*) Quants nombres hi ha de deu xifres que s'escriguin fent servir només algunes de les xifres 1, 2 i 3 o totes tres, en els quals dues xifres contigües qualssevol difereixin d'1?

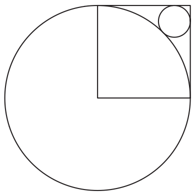
A) 16  B) 32  C) 64  D) 80  E) 100

**13.** (*Eslovàquia*) El cub de la figura està format per quatre cubs transparents i quatre cubs opacs. Els cubs opacs estan col·locats de tal manera que les sis vistes laterals són totalment opaques. Si formem un cub $3 \times 3 \times 3$ amb cubs transparents i opacs amb la mateixa propietat, quin és el mínim nombre de cubs opacs que necessitarem?



A) 8  B) 9  C) 10  D) 12  E) 18

**14.** (*Polònia*) El quadrat de la figura té els costats de longitud 1. Aleshores el radi del cercle menut és igual a

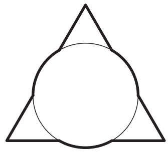


A) $\sqrt{2}-1$  B) $\frac{1}{4}$  C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$  D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$  E) $(1-\sqrt{2})^2$

**15.** (*Sèrbia*) Quin és el darrer dígit del nombre $1^2 - 2^2 + \cdots - 2008^2 + 2009^2$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**16.** (*Catalunya*) Un triangle equilàter de costat 3 i un cercle de radi 1 se superposen de manera que els centres de les dues figures coincideixen. Quant mesura el perímetre de la figura que s'obté així?



A) $6+\pi$ B) $3+2\pi$ C) $9+\dfrac{\pi}{3}$ D) $3\pi$ E) $9+\pi$

**17.** (*Txèquia*) Les gràfiques de les funcions reals $f$ i $g$ es troben a la figura. Quina és la relació entre $f$ i $g$?

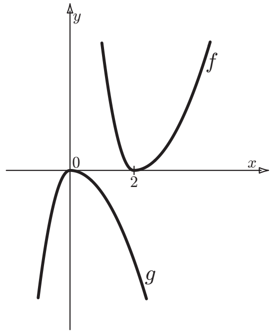
A) $g(x-2) = -f(x)$

B) $g(x) = f(x+2)$

C) $g(x) = -f(-x+2)$

D) $g(-x) = -f(-x+2)$

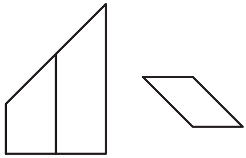
E) $g(2-x) = -f(x)$



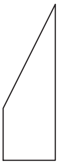

**18.** (*Bielorrússia*) S'han proposat quatre problemes a cadascun dels 100 participants d'una olimpíada matemàtica. 90 concursants van resoldre el primer problema, 85 van resoldre el segon problema, 80 van resoldre el tercer problema i 70 van resoldre el quart problema. Quin és el mínim nombre possible de concursants que van resoldre els quatre problemes?

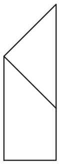
A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

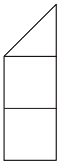
**19.** (*Suïssa*) A la figura de la dreta es veuen la vista frontal i la vista des de dalt d'un sòlid geomètric. Quina de les figures següents descriu la vista des de l'esquerra?

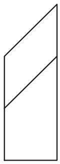


Vista frontal Vista superior

A) 

B) 

C) 

D) 

E) Cap de les anteriors

**20.** (*França*) Dos corredors donen voltes al voltant d'un estadi. Tots dos corren de manera continuada a una velocitat constant. $A$ corre més ràpid que $B$. $A$ triga 3 minuts a fer una volta. $A$ i $B$ comencen en el mateix moment. Passats 8 minuts, $A$ passa $B$ per primera vegada. Quant triga $B$ a fer una volta?

A) 6 min B) 8 min C) 4 min 30 s D) 4 min 20 s E) 4 min 48 s

## Qüestions de 5 punts

**21.** (*Polònia*) Hem construït una taula de $3 \times 3$. S'ha emplenat amb nombres de manera que la suma a cada fila, a cada columna i a cada diagonal sigui la mateixa. A la figura es mostren dos dels nombres que hem col·locat. Quin és el nombre en la posició $a$?

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | | |
| | | 47 |
| | 63 | |

A) 16 B) 32 C) 55 D) 110 E) És impossible determinar-lo

**22.** (*Àustria*) Sigui $Z$ la quantitat de nombres formats per 8 dígits diferents, cap dels quals no és 0. Quants d'aquests nombres són divisibles per 9?

A) $\frac{Z}{8}$ B) $\frac{Z}{3}$ C) $\frac{Z}{9}$ D) $\frac{8Z}{9}$ E) $\frac{7Z}{8}$

**23.** (*Catalunya*) Elegim a l'atzar tres vèrtexs diferents d'un polígon regular de 40 costats. Quina és la probabilitat que siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle?

A) $\frac{1}{39}$ B) $\frac{3}{38}$ C) $\frac{1}{38}$ D) $\frac{1}{13}$ E) Cap de les anteriors

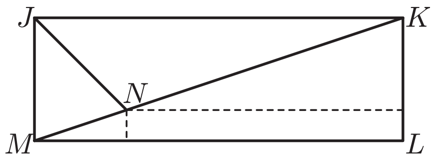
**24.** (*Bulgària*) Per a quants enters $n \geq 3$ hi ha un polígon convex de $n$ costats els angles dels quals estiguin a la raó, $1 : 2 : \cdots : n$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) Més de 5

**25.** (*Ucraïna*) 55 escolars van participar en una olimpíada matemàtica. En corregir-los, el jurat marcava amb un $+$ els problemes solucionats correctament, amb un $-$ els problemes resolts de manera incorrecta i amb un 0 si el participant no l'havia resolt. Després, es va observar que cap dels concursants van coincidir en el nombre de $+$ i $-$. Quin és el nombre mínim de problemes possible de l'olimpíada?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

**26.** (*França*) Al rectangle $JKLM$, la bisectriu de l'angle $\widehat{KJM}$ talla la diagonal $KM$ en el punt $N$. Les distàncies de $N$ als costats $LM$ i $KL$ són, respectivament, 1 i 8. Per tant, la longitud $LM$ és:




A) $8 + 2\sqrt{2}$ B) $11 - \sqrt{2}$ C) 10 D) $8 + 3\sqrt{2}$ E) $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

**27.** (*Regne Unit*) Si $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, quants valors possibles de $k$ existeixen?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

**28.** *(Bulgària)* Els nombres $1, 2, 3, \ldots, 99$ estan distribuïts en $n$ grups d'acord amb les condicions següents:

- cada nombre pertany a un sol grup,
- almenys hi ha dos nombres a cada grup, i
- si dos nombres estan al mateix grup la seva suma no és divisible per 3.

El nombre $n$ més petit que té aquesta propietat, és a dir que permet fer la distribució tal com s'ha indicat és:

A) 3 B) 9 C) 33 D) 34 E) 66

---

**29.** *(Mèxic)* La Susana i les seves tres germanes van al teatre. Tenen una llotja amb quatre seients. La Susana i dues de les seves germanes arriben més d'hora i ocupen tres dels quatre seients a l'atzar. Quina és la probabilitat que la Susana hagi de canviar de seient si en arribar la Maria, la germana petita, aquesta insisteix a ocupar el seient que tenia assignat i també insisteixen a fer-ho qualssevol de les germanes que s'hagin hagut d'aixecar a causa d'això?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

---

**30.** *(França)* La successió de nombres enters $a_n$ està definida de la manera següent: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ per $n \geq 0$. El residu de la divisió de $a_{2009}$ per 7 és:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 6

# Premis i mencions

**Primer premi**

Ivan Geffner Fuenmayor (IES Maragall, Barcelona), 110.0 punts

**Premis per al pòdium**

ex-aequo, Alejandro De Miquel Bleier (Fundación Escuela Suiza, Barcelona) i Joshua Solaní Núñez (IES Almatà, Balaguer), 103.75 punts

**Premis de categoria A**

Juan Antonio Puig Ferré (IES Prof. Manuel Broseta, Banyeres de Mariola), 101.25 punts
Andreu Mayo Casademont (IES Jaume Vicens Vives, Girona), 100.0 punts
Sergi Picard Armada (IES Samuel Gili i Gaya, Lleida), 99.0 punts

**Premi de categoria B**

Víctor Cancer Castillo (IES Pere Calders, Cerdanyola del Vallès), 98.5 punts
Víctor Codony Domènech (Aula Escola Europea, Barcelona), 97.5 punts
Carlos Ruíz Carmona (IES Salvador Espriu, Barcelona), 96.75 punts

**Premis de categoria C**

Roger Mont Arnal (IES Gregori Maians, Oliva), 96.25 punts
Ferran Brosa Planella (IES La Garrotxa, Olot), 93.75 punts
Lluc Pont Rojas (Escola Pia de Nostra Senyora, Barcelona), 93.25 punts

**Premis de categoria D**

Jorge Valiente Jorge (IES Can Planas, Barberà del Vallès), 92.5 punts
María Gavilà Lloret (IES La Vereda, La Pobla de Vallbona), 92.0 punts
Arnau Duran Ferrero (IES Santiago Sobrequés i Vidal, Girona), 87.5 punts
Xavier Centelles Soler (Aula Escola Europea, Barcelona), 87.25 punts

**Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions**

Guillem Rufian Torrell (IES Jaume I, Salou), 87.0 punts
Albert Domínguez Martínez (Escola Pia de Mataró, Mataró), 86.25 punts
Safae Lakzaini (IES Maragall, Barcelona), 86.0 punts
Cristian Andrés Rodríguez Hernández (IES Dr. Puigvert, Barcelona)
i Rami Lukata Shatali (IES Maragall, Barcelona), 85.0 punts
Oscar Santegoeds (Hamelín-Internacional Laie, Alella), 84.75 punts
Beatriz Corberó Molina (Aula Escola Europea, Barcelona), 84.25 punts
Xavier Vives Jaume (IES Angeleta Ferrer i Sensat, Sant Cugat del Vallès), 84.0 punts.

## Qüestions de 3 punts. Solucions

**1. E. 100**.

Si l'1% de 200 peixos són blaus, és que hi ha 2 peixos blaus. Perquè representin el 2% del total, han de quedar 100 peixos a l'aquari. Per tant n'haurem de treure 100 peixos grocs.

**2. A.** $\sqrt{2} - \sqrt{1}$.

Podem veure que $\sqrt{2} - \sqrt{1} > \sqrt{3} - \sqrt{2}$ perquè aquesta desigualtat equival a $2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{3}$ i, com que es tracta de nombres positius, aquesta equival a la que resulta d'elevar al quadrat els dos membres, és a dir a $8 > 4 + 2\sqrt{3}$, cosa que és certa perquè sabem que $\sqrt{3} < 2$. Semblantment podríem raonar que el nombre de l'opció B) de resposta és més gran que el C), aquest que el D) i aquest que el que tenim a l'opció E).

És interessant raonar-ho en general. Tenim

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Veiem, doncs, que la diferència $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ disminueix a mesura que $n$ augmenta.

**3. B. 1**.

Com que $n^2 + n = n \cdot (n+1)$, aquest nombre només podrà ser primer quan $n = 1$.

**4. C. 37,20 €**.

Si cada una de les tres persones va prendre el mateix, aleshores la quantitat total que van pagar dividida per 3 ha de donar un valor exacte d'euros i cèntims. Podeu recordar el criteri de divisibilitat per 3 i veureu que l'única resposta que el compleix és 37,20 €. Cada persona haurà pagat $\frac{37,20}{3} = 12,40$ €.

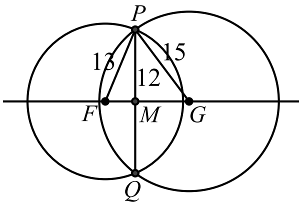
**5. C. 13**.

Si la primera persona de la cua digués la veritat totes les altres serien mentideres i aleshores, com que sabrien com és realment cadascú, totes les de la cua excepte la segona persona dirien que la del seu davant és veraç. Com que no diuen això deduim que la primera persona de la cua és mentidera.
Així doncs la segona persona de la cua és veraç.
Com que la tercera persona de la cua diu que la segona és mentidera, ella és mentidera. Amb la quarta persona passa com amb la segona; amb la cinquena com amb la tercera; etc.
Per tant les persones de la cua són alternativament mentidera, veraç, mentidera, ..., veraç i mentidera. En total hi ha 13 persones mentideres.

---

**6. D. 14**.

Si $M$ és el punt mitjà del segment $PQ$ es determinen dos triangles rectangles $\triangle FPM$ i $\triangle GPM$. Si apliquem el teorema de Pitàgores a aquests dos triangles es veu de seguida que $FM = 5$ i $MG = 9$. Per tant la distància demanada és 14.




---

**7. D. 7**.

A la caixa hi ha tres mitjons foradats. En el cas general, si només traiem 6 mitjons podrien ser els tres foradats i els altres tres de tres colors diferents. En canvi, si en traiem 7, en el pitjor del casos n'hi ha tres de foradats, però en queden 4 que només poden ser de tres colors, i algun color es repetirà. En cas que els dos mitjons blancs estiguessin foradats n'hi hauria prou traient 6 mitjons però l'enunciat demana d'estudiar el problema sense cap condició.

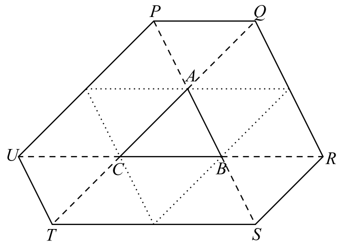
---

**8. A. 21**.

Tal com es planteja l'enunciat només cal triar quines 2 persones del conjunt de 7 aniran en moto. Aquesta tria es pot fer de $\binom{7}{2} = 21$ maneres.

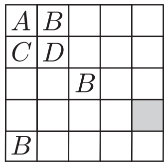
**9. D. 13.**

Si tracem paral·leles per $A$, $B$ i $C$ respectivament a $PQ$, $RS$ i $TU$, la figura queda dividida en 13 triangles que tenen tots la mateixa àrea.




**10. E.** $C$ **o** $D$.

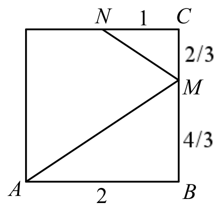
A la casella just a la dreta de la $B$ de la primera fila hi podrien anar, en principi, $A$ o $C$ però si es mira d'anar omplint caselles es veu que la $C$ no hi pot anar. Si es van omplint caselles seguint les indicacions de l'enunciat es veu que a la primera fila hi ha d'anar necessàriament $ABABA$, a la segona $CDCDC$ i a la tercera $BABAB$. A la quarta fila hi pot anar $CDCDC$ o $DCDCD$.




# Qüestions de 4 punts. Solucions

**11. A.** $2\sqrt{13}$.

Els triangles $\triangle ABM$ i $\triangle NCM$ són triangles rectangles semblants perquè tenen un angle agut igual (l'angle de rebot en la banda). Com que $AB = 2$ i $CN = 1$ també serà $BM = 2 \cdot MC$ i, per tant com que $BM + MC = 2$ tenim $BM = 4/3$ i $MC = 1/3$. La suma de les hipotenuses d'aquests dos triangles rectangles és la meitat de la trajectòria que estudiem. Si en calculem la longitud mitjançant el teorema de Pitàgores arribem a la solució indicada.

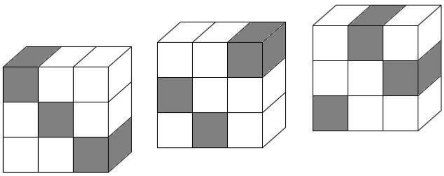


**12. C. 64**.

Si el nombre comença per 1 o per 3 haurà d'anar seguit, alternativament, per un 2, un 1 o un 3, un 2 i així successivament. Cinc posicions fixes i cinc posicions amb dues possibilitats; això fa un total de $2^5 = 32$ nombres. Si imaginem que el nombre comença per 2 repetiríem l'explicació i trobaríem 32 nombres més. Així obtenim un total de 64 nombres.

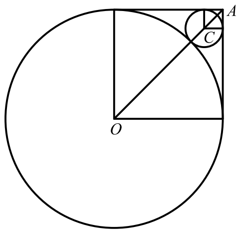
**13. B. 9**.

És clar que caldrà un mínim de 9 cubs opacs; altrament no és possible fer opaques totes les vistes. Amb 9 cubs opacs es pot fer el que es demana situant-los d'acord amb els esquemes següents que mostren respectivament la cara del davant del cub $3 \times 3 \times 3$, la secció central i la cara del darrere.



**14. E.** $(1 - \sqrt{2})^2$.

Si $O$ és el centre del cercle gran, $C$ el centre del cercle petit, i $A$ el vèrtex exterior del quadrat, aleshores es pot veure que $OA$ és igual al radi del cercle gran, que té longitud 1, més el radi $r$ del cercle petit, més la diagonal del quadrat petit que es forma fent paral·leles des de $C$ als costats del quadrat. Com que el costat d'aquest quadrat petit és $r$ la diagonal mesura $r\sqrt{2}$. A partir de $OA = \sqrt{2} = 1 + r + r\sqrt{2}$ obtenim $r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ expressió que, racionalitzada, ens dóna $r = (\sqrt{2}-1)^2$, que coincideix amb la resposta E.

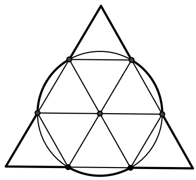


**15. E. 5.**

Com que la suma de tots els quadrats dels nombres acabats en 2, en 4, en 6 i en 8, és a dir, els que es resten, acaba en $4+6+6+4$ o sigui en 0, busquem l'última xifra de la suma dels sumands positius. La suma dels quadrats d'un nombre acabat en 1, d'un nombre acabat en 3, d'un nombre acabat en 5, d'un nombre acabat en 7 i d'un nombre acabat en 9 acaba en $1+9+5+9+1$ és a dir en 5. Com que per arribar des de $1^2$ a $2009^2$ trobarem un nombre imparell de coleccions com la que acabem de comentar, l'última xifra demanada serà un 5.

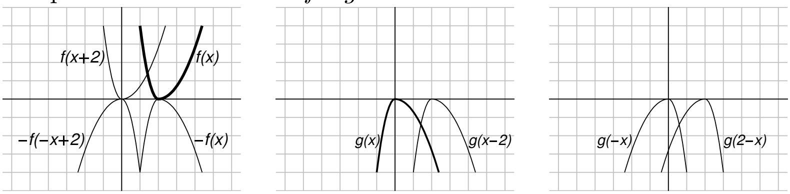
**16. A.** $6+\pi$.

Si fem una rotació d'angle 60° amb centre de rotació el centre comú del triangle i del cercle la figura es transformarà en ella mateixa. Per aquesta raó els punts assenyalats sobre el perímetre de la figura es transformen cada un en el següent i els triangles auxiliars que s'han dibuixat són tots ells equilàters de costat 1. El perímetre de la figura està format per sis segments de longitud 1 i una longitud igual a un semicercle de radi 1, és a dir $\pi$.



**17. A o D.**

Les figures mostren totes les funcions que apareixen a les opcions de resposta. És interessant que cadascú raoni com es pot deduir quina és la forma de cada una a partir de les funcions $f$ i $g$ inicials.




Es pot veure que hi ha dues opcions de resposta correctes $g(x-2) = -f(x)$ i $g(-x) = -f(-x+2)$.

**18. D. 25**.

Com que 10 concursants han fallat el primer problema, 15 el segon, 20 el tercer i 30 el quart, com a màxim han fallat algun problema $10+15+20+30 = 75$ persones. Per tant com a mínim hauran resolt correctament tots els problemes $100 - 75 = 25$ persones.

**19. D**.

Una acurada anàlisi espacial de les figures mostra que la resposta correcta és la D). Podem proposar a les persones que llegeixen aquest comentari que facin un retallable i mirin de construir la figura. Ben segur que això ajuda a assolir una millor visió de les figures geomètriques de tres dimensions.

**20. E. 4 min 48 s**.

$A$ ha fet en 8 minuts 2 voltes més 2/3 de volta. Es podria pensar que en aquest mateix temps $B$ ha fet 2/3 de volta però no és així perquè aleshores $A$ ja l'hauria atrapat abans. Per tant $B$ ha fet en els 8 minuts 1 volta més 2/3 de volta, és a dir 5/3 de volta. Per tant farà una volta en 24/5 de minut, que correspon a la resposta indicada.

## Qüestions de 5 punts. Solucions

**21. C. 55**.

Indico com $c$ el valor de la casella central i com $S$ la suma comuna. Aleshores els nombres de les caselles de sobre de la $c$ i de l'esquerra de la $c$ seran $S - 63 - c$ i $S - 47 - c$. Els valors dels dos extrems de la diagonal secundària seran $63 + c - a$ i $47 + c - a$ i així ja puc saber el número de baix a la dreta, que és $S - 110 - c + a$. Aleshores si miro la diagonal principal s'ha de complir $(S - 110 - c + a) + c + a = S$. I ja puc obtenir el valor de $a$.

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | | |
| | | 47 |
| | 63 | |

**22. C.** $\dfrac{Z}{9}$.

Com que $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, que és múltiple de 9, l'única manera de trobar un nombre amb 8 dígits diferents que sigui múltiple de 9 serà imposar que estigui format pels dígits $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Com que dels $Z$ nombres de l'enunciat resulta que a $Z/9$ "els falta" l'1, a $Z/9$ "els falta" el 2, i així successivament, també són $Z/9$ els nombres formats sense fer servir el 9.

---

**23. D.** $\dfrac{1}{13}$.

El nombre total de triangles que podem definir escollint-ne els tres vèrtexs entre els d'un polígon regular de 40 costats és $\binom{40}{3} = 9880$ . Imaginem ara aquest polígon inscrit en una circumferència. Com que un angle recte inscrit en una circumferència ha de comprendre un angle de 180° aleshores els dos punts que determinin la hipotenusa del triangle rectangle hauran de ser els extrems d'un diàmetre i l'altre vèrtex podrà ser qualsevol dels altres punts. Per triar un diàmetre tenim 20 possibilitats, cada una de les quals es combina amb 38 possibilitats per triar el vèrtex de l'angle recte. Per tant, la probabilitat demanada és $\dfrac{20\cdot 38}{9880} = \dfrac{1}{13}$.

---

**24. B. 2**.

Els angles seran $a, 2a, 3a, ..., n\cdot a$ per a un cert valor de l'angle $a$. Ara bé, els angles han de sumar $a+2a+3a+...+n\cdot a = (n-2)\cdot 180°$ i això és $a\cdot\dfrac{1+n}{2}\cdot n = (n-2)\cdot 180°$. D'aquí podem aillar el valor de l'angle més gran del polígon $n\cdot a = \dfrac{(n-2)\cdot 360°}{n+1}$. Perquè el polígon sigui convex aquest angle ha de ser més petit que 180°. Si ho imposem i aillem $n$ trobem que ha de ser $n<5$ i, per tant, només es pot complir l'enunciat per a un triangle (angles de 30°, 60° i 90°) i per a un quadrilàter (angles de 36°, 72°, 108° i 144°).

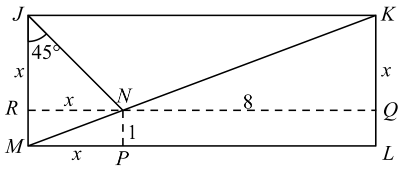
**25. B. 9**.

Perquè es compleixi l'enunciat podem trobar un participant que tingui tot 0, és a dir que no hagi presentat resposta a cap problema; dos participants que tinguin un 0 en tots els problemes menys en un (un tindrà un + i l'altre un −); 3 participants que tinguin tot 0 excepte en dos problemes (com que no ens interessa res més que la qualitat de les respostes i no a quin problema corresponguin, les possibilitats a considerar són ++, +− i −−); semblantment poden haver-hi 4 participants amb tot 0 excepte en 3 problemes (possibilitats $+++$, $++-$, $+--$,$---$); i així successivament fins a 10 participants que poden tenir diferents nombre de + i − amb 9 problemes contestats. Com que $1+2+3+...+10 = 55$ deduim la resposta indicada.

**26. A.** $8 + 2\sqrt{2}$.

Com que la bisectriu de l'angle en $J$ que indica l'enunciat determina angles de 45° amb els costats del rectangle, el triangle $\triangle JRN$ és un triangle rectangle isòsceles.

Per això totes les distàncies marcades amb $x$ a la figura són iguals.




Aleshores, com que els triangles $\triangle MPN$ i $\triangle NQK$ són semblants es dedueix que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{8}$ i d'ací $x^2 = 8$ és a dir $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

**27. B. 2**.

Si opero a partir de $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{a+c}$ obtinc $a^2 + a \cdot c = b \cdot c + b^2$ i d'aquí arribo a $(a-b)\cdot(a+b) = c\cdot(b-a)$. Aquesta igualtat només es pot complir si $a - b = 0$ o si $c = -(a+b)$.

Semblantment, a partir de $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{c}{a+b}$ arribem a $(a-c)\cdot(a+c) = b\cdot(c-a)$ i, per tant, ha de ser $a - c = 0$ o $b = -(a+c)$.

Si estudiem totes les possibilitats veurem que només pot ser $a = b = c$ i aleshores $k = \dfrac{c}{a+b} = 1/2$ o bé $c = -(a+b)$, que equival a $b = -(a+c)$, i aleshores $k = \dfrac{c}{a+b} = -1$ .

**28. C. 33**.

Dos múltiples de 3 no poden estar junts. Com que n'hi ha 33, necessitarem, com a mínim, 33 grups. I amb 33 grups ja podem fer la distribució que proposa l'enunciat, posant a cada grup un múltiple de tres i repartint els nombres que són de la forma $3j+1$ en 16 grups i els nombres que són de la forma $3k+2$ en els altres 17 grups, per exemple, però sense barrejar en cap grup un nombre del tipus $3j+1$ amb un nombre del tipus $3k+2$.

---

**29. A.** $\frac{1}{2}$.

Si imaginem les 24 possibilitats perquè s'asseguin la Susanna i les dues germanes que han arribat d'hora i deixin una cadira buida veuríem que en 12 d'aquestes situacions la Susanna ha de canviar de cadira. Aquestes situacions són totes aquelles en què la cadira de la Susanna és la que havia quedat lliure (6 casos), aquelles en què la Susanna seu a la cadira de la Maria i el seu seient està ocupat (4 casos més) i, finalment, els dos casos en què la cadira de la Maria està ocupada per una germana i la Susanna seu justament a la cadira d'aquesta germana (2 casos més). En total 12 casos favorables al que es demana d'un total de 24 casos possibles donen una probabilitat $\frac{1}{2}$

---

**30. B. 1**.

Si el residu de la divisió de $A$ per 7 és $a$ i el residu de la divisió de $B$ per 7 és $b$, aleshores el residu de la divisió de $A+B^2$ per 7 és el mateix que el residu de la divisió de $a+b^2$ per 7. Per comprovar aquesta propietat basta escriure $A=a+7j$, $B=b+7k$ i veure que $A+B^2$ es pot escriure com $a+b^2+$ un múltiple de 7.

Vist això en tindrem prou construint la successió de residus corresponent a l'enunciat, que s'observa que segueix la cadència 1, 2, 5, 6, 6, 0, 6, 1, 0, 1 i successivament es van repetint 1, 2, 5, 6, 6, 0, 6, 1, 0, 1. Com que el primer terme de la successió s'ha indicat com $a_0$, el terme $a_{2009}$ correspondrà a l'últim 1 d'un d'aquests grups.